

Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos

Von der Fakultät
für Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Ing. Caroline Leppert
aus Jena

Eingereicht am	17. Januar 2007
Mündliche Prüfung am	13. Juli 2007
Berichter	Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler Prof. Dr.rer.nat. Heinz Antes
Prüfer	Prof. Dr.-Ing. Jörg Schwedes

Braunschweig 2007

ISBN 978-3-926031-00-6

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

© Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2007

Kurzfassung

Beim Entleeren von Silos und während Hangrutschungen treten in granularen Materialien Phasenübergänge von einem festen, geschwindigkeitsunabhängigen in einen flüssigen, viskosen Zustand auf. Im Ruhezustand kennzeichnet ein elastoplastisches, dilatantes Verhalten das Material. Für geringe Dichten und hohe Geschwindigkeitsgradienten zeigt das Material hingegen ein Verhalten ähnlich einer nicht-newtonschen Flüssigkeit. Das vorgestellte Materialmodell berücksichtigt beide Bewegungszustände und insbesondere den Phasenübergang zwischen ihnen. Die numerische Simulation der dynamischen Vorgänge während des Entleerens von Silos erfolgt mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode und einer einheitlichen Betrachtung von Silowand, Schüttgut und umgebender Luft. Die durchgeführten Simulationen ermöglichen die Analyse der Phänomenologie der Siloentleerung und Aussagen über Einflüsse geometrischer sowie materiebezogener Größen. Dabei stehen das Entleerverhalten, der Spannungszustand sowie Wandsteifigkeit und Wandreibungswinkel im Mittelpunkt der Betrachtung.

Abstract

During landslides and discharge of silos granular materials show phase transitions from a solid-like, rate-independent to a fluid-like, viscous state. The quasi-static state is characterised by an elasto-plastic, dilatant behaviour. On the other hand, granular materials of low densities and high strain rates show a behaviour similar to compressible, non-Newtonian fluids. The presented model includes both material states emphasising on the occurrence and form of the phase transition. The numerical simulation of dynamical effects during the discharge of silos is carried out applying Space-Time-Finite-Element-Method for silo structure, bulk material and surrounding air. The model allows for the analysis of silo phenomena with respect to the discharge process and resulting stresses as well as effects of wall stiffness, wall friction and silo geometry.

Inhalt

Bezeichnungen	ix
1 Einleitung	1
1.1 Modellbildung	2
1.2 Zielsetzung	4
2 Fluidbeschreibung des Granulars	5
2.1 Experimentelle Untersuchungen und Modellierungsansätze	5
2.1.1 Reine Scherströmungen	6
2.1.2 Phasenübergänge und Dilatanz	7
2.1.3 Modellierungsansätze	7
2.2 Phänomenologische, ratenabhängige Modelle	8
2.2.1 Modellierung inkompressibler granularer Fluide	8
2.2.2 Berücksichtigung der Kompressibilität	9
2.3 Modell für die Beschreibung reibungsbehafteter Fluide	10
2.3.1 Bingham'sche Flüssigkeit	10
2.3.2 Erweiterte, reibungsbehaftete Fluidmodelle	11
2.3.3 Verwendetes Materialmodell	12
2.4 Darstellung des Strömungsverhaltens granularer Materialien	14
2.4.1 Strömung in einem Kanal	14
2.4.2 Regularisierung der reibungsbehafteten Scherspannung	15
2.4.3 Bestimmung der Fließregionen	16
3 Feststoffbeschreibung des Granulars	19
3.1 Einführung	19
3.1.1 Eigenschaften granularer Feststoffe	19
3.1.2 Anforderungen an die Modellierung	20
3.1.3 Modellierungsansätze	20
3.2 Viskoplastizität	22
3.2.1 Phänomenologie	22
3.2.2 Fließgrenzen	23
3.2.3 Fließregel	24
3.2.4 Zeitabhängiges Materialverhalten	26

4	Materialmodell mit gewichtetem Phasenübergang	29
4.1	Ergebnisse experimenteller Untersuchungen	29
4.2	Experimentell begründete Anforderungen an die Modellierung	30
4.3	Stand des Wissens	31
4.3.1	Additive Modelle für granulare Materialien	31
4.3.2	Flüssigkeitsmodelle aus Fließregeln für plastisches Materialverhalten	32
4.3.3	Geometrisch getrennte Phasen	33
4.3.4	Gewichtete Spannungen und Kontaktmodell	33
4.4	Materialmodell mit gewichtetem Phasenübergang	35
4.4.1	Aufbau des Stoffmodells	35
4.4.2	Wahl der Wichtungsfunktion	37
4.5	Anpassung der Modellparameter an experimentelle Ergebnisse	38
4.5.1	Spannungen in einer stationären Hangströmung	39
4.5.2	Geschwindigkeitsprofile	40
5	Lösungsverfahren	43
5.1	Grundgleichungen	43
5.1.1	Kinematik	43
5.1.2	Bilanzgleichungen	45
5.1.3	Materialgleichung	47
5.2	Raum-Zeit-Finite-Element-Methode	47
5.2.1	Schwache Form der Bilanzgleichung	48
5.2.2	Diskretisierung	49
5.2.3	Zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren	51
5.2.4	Stabilisierung	52
5.3	Abbildung des Feststoffmodells in Eulerscher Betrachtungsweise	53
5.3.1	Wahl des Bezugssystems	54
5.3.2	Bestimmung der Verschiebung	55
5.3.3	Berechnung der viskoplastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten	58
5.4	Berechnung randgekoppelter Systeme	59
5.4.1	Fluid-Struktur-Kopplung	59
5.4.2	Fluid-Fluid-Kopplung	62
5.5	Lösungsalgorithmus	65
6	Anwendungsbeispiele	71
6.1	Stoßwellenausbreitung in einem Dehnstab	71
6.1.1	Elastischer Dehnstab	71
6.1.2	Viskoplastischer Dehnstab	73
6.1.3	Dehnstab mit zwei Materialien	74

6.2	Reibungseinflüsse in quasi-statischem Schüttkegel	76
6.2.1	Fließverhalten mit reiner Fluidformulierung	77
6.2.2	Verwendung des Materialmodells mit Phasenübergang	80
6.3	Hangrutschung	82
6.3.1	Anpassung der Modellparameter an experimentelle Ergebnisse .	82
6.3.2	Umströmung eines Hindernisses	86
7	Strukturanalyse von Silos	89
7.1	Phänomenologie und Bemessungsgrundlagen	89
7.2	Vorbetrachtungen	91
7.2.1	Füllprozeß	91
7.2.2	Silo mit ebenem Boden	94
7.3	Verfahrenstechnische Betrachtungen	97
7.3.1	Siloabmessungen und Modellparameter	97
7.3.2	Entleerungsgeschwindigkeit	98
7.3.3	Verdichtungszone und Auflockerung	101
7.3.4	Kern- und Massenfluß	104
7.4	Konstruktive Bemessung der Silostruktur	106
7.4.1	Zeitliche Entwicklung	107
7.4.2	Spannungen zu Beginn der Entleerung	108
7.4.3	Einfluß der Wandreibung	110
7.5	Wandverformung	112
7.5.1	Einfluß der Wandsteifigkeit	112
7.5.2	Einfluß der Anordnung der Auflager	114
8	Zusammenfassung	117
	Literatur	121

Bezeichnungen

Allgemeine Notationen

d	Differential
∂	partielle Ableitung
\dot{u}	partielle Zeitableitung der Variable u
tr	Spurbildung
$\ A\ $	Euklidische Norm eines Tensors zweiter Stufe
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalares Tensorprodukt
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Doppeltskalares Tensorprodukt
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Dyadisches Produkt

Skalare

t	Zeit
J_1^T	1. Grundinvariante des Spannungstensors
J_2^T	2. Grundinvariante des Spannungsdeviators
J_i^D	i -te Grundinvariante des Verzerrungsgeschwindigkeitentensors
$f()$	Fließbedingung
$g()$	plastisches Potential
E	Elastizitätsmodul
K	Kompressionsmodul
ν	Querkontraktionszahl
η	Viskosität
φ_h	Haftreibungswinkel
φ_g	Gleitreibungswinkel
μ	Wandreibungsbeiwert
c	Kohäsion
α, k	Parameter der Drucker-Prager-Fließfläche
ϱ	Dichte
π	Volumenanteil des Feststoffes
ϱ_S	Rohdichte
p	Druck
c	Schallgeschwindigkeit
Φ_i	Ersatzviskositäten
ξ	Übergangsparameter
ϵ	Regularisierungsparameter
κ	Stabilisierungsparameter

Vektoren

- \mathbf{u} Verschiebung
- \mathbf{v} Geschwindigkeit
- \mathbf{b} Beschleunigung
- \mathbf{X} Ortsvektor in die Ausgangskonfiguration
- \mathbf{x} Ortsvektor in die Momentankonfiguration

Tensoren 2. Stufe

- \mathbf{I} Einheitstensor
- \mathbf{T} Cauchy-Spannungstensor
- $\boldsymbol{\tau}$ Deviatorspannung des Cauchy-Spannungstensors
- \mathbf{A} Almansischer Verzerrungstensor
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ linearisierter Verzerrungstensor
- \mathbf{L} Geschwindigkeitsgradient
- \mathbf{D} Verzerrungsgeschwindigkeitentensor
- \mathbf{W} Drehgeschwindigkeitstensor

Tensoren 4. Stufe

- $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ Elastizitätstensor

Kopfzeiger

- F Fluid
- S Solid
- St Struktur
- T Transposition

Fußzeiger

- h Haften
- g Gleiten
- f Fließgrenze
- el elastisch
- vp viskoplastisch
- vol volumetrisch

Hier nicht aufgeführte sowie abweichende Größen sind im Text definiert.

1 Einleitung

In vielen Bereichen der Lebensmittel-, Pharma- und Bauindustrie werden Silos zur Lagerung von Schüttgütern verwendet. Während des Entleerens mit granularen Materialien gefüllter Silos kann es aufgrund großer dynamischer Lasten zu störenden und konstruktionsgefährdenden Phänomenen kommen. Hierzu zählen Brückenbildung und tote Zonen ebenso wie pulsierendes Ausfließen, welches durch Materialbewegungen und Interaktion mit der Konstruktion hervorgerufen wird [12].

Die Kenntnis der Druckverhältnisse ist in Silos sowohl im Füllzustand als auch während des Entleerens von großer Bedeutung für die Bemessung. Bestehende Normen [1] berücksichtigen die maßgeblichen Lasten zu Beginn des Entleerungsvorganges ausschließlich über Sicherheitsfaktoren aus den statischen Lasten im Füllzustand. Unmittelbar nach dem Öffnen des Silos erfolgt jedoch ein Phasenübergang von einem feststoff- zu einem flüssigkeitsähnlichen Materialverhalten und führt zu dem als Switch bezeichneten Phänomen. Hierbei entstehen lokale Spannungsmaxima infolge der Ausbildung von Auflockerungs- und Verdichtungszone und der Umlagerung der Lastverteilung innerhalb des Schüttgutes, welche zu einem Versagen der Wand führen können.

Für die verfahrenstechnische Auslegung ist neben statischen Gesichtspunkten das Fließprofil von Bedeutung. Abhängig von Trichterneigung, Wandreibungsbeiwert und Schüttguteigenschaften stellt sich ein Massenfluß oder ein Kernfluß im Silo ein. Weitere Diskontinuitäten im Fließprofil entstehen bei geringer Trichterneigung infolge von Verdichtungs- und Auflockerungszone [34]. Infolge des ungleichmäßigen Fließprofils entstehen toten Zonen, in welchen sich das granulare Material nicht bewegt. Diese müssen aufgrund der gesetzlich vorgeschriebenen Rückverfolgbarkeit des gelagerten Materials und für eine bessere Auslastung des Silos mittels zusätzlicher Austragshilfen entfernt werden [2]. Desweiteren ist die Interaktion zwischen Bauwerk und Schüttgut für den Entleerungsvorgang von Bedeutung, da bereits kleine Verformungen der Silowand und Änderungen der Wandrauhigkeit die Form des Fließprofils entscheidend beeinflussen.

Bestehende Modelle beruhen meist auf experimentellen und empirischen Untersuchungen mit einer begrenzten Anzahl geometrischer Abmessungen und Materialien und sind daher nicht in der Lage, Vorhersagen über das dynamische Entleerungsverhalten unter Berücksichtigung aller Effekte zu treffen. Daher kommen immer häufiger numerische

Untersuchungen, insbesondere mit der Finite-Elemente-Methode, zur Analyse von Silos zum Einsatz. Die Strukturanalysen erfordern ein Materialmodell, welches flüssige und feste Zustände abbilden kann, ebenso wie eine Modellierung der Kopplung zwischen Schüttgut und Silostruktur.

1.1 Modellbildung

Zu den in Silos gelagerten Granularen zählen Pulver in der Pharmaindustrie, Weizen in der Landwirtschaft oder Zement in der Baubranche. Trotz unterschiedlicher Anwendungen und Partikeldurchmesser können ähnliche Phänomene bei diesen verschiedenen Materialien beobachtet werden. Infolgedessen existiert eine Vielzahl an experimentellen und numerischen Modellierungsansätzen zur Beschreibung granularer Materialien, wobei wenige für die Untersuchung des Entleerungsvorganges von Silos geeignet sind.

Granulare Materialien bestehen aus einzelnen Partikeln, welche nur über Kontaktkräfte interagieren. Für trockene granulare Medien wird unter Vernachlässigung des Porenraumfluids das Materialverhalten vorrangig vom Feststoffanteil und somit der Dichte des Haufwerks bestimmt [46]. Für hohe Feststoffanteile dominieren Reibkontakte zwischen den Partikeln, während Energie- und Impulsaustausch über viele kurzzeitige Kollisionen für geringe Partikelkonzentrationen die Eigenschaften bestimmen. Für geringe Feststoffanteile und hohe Scherraten verhalten sich Granulare nahezu wie Flüssigkeiten, wohingegen sie unter quasi-statischen Bedingungen ein feststoffähnliches Verhalten zeigen.

Abhängig von der Aufgabenstellung existieren unterschiedliche Modellansätze zur Beschreibung des Materialverhaltens. In der Bodenmechanik ist vorrangig der Grenzzustand der Tragfähigkeit des festen Granulars von Interesse, während die Verfahrenstechnik Informationen über Fließeigenschaften und Transportfähigkeit des Materials benötigt. Bestehende Materialmodelle beschreiben meist nur einen Anwendungsbereich und ermöglichen somit keine Beschreibung des Übergangs von festem zu flüssigem Zustand, wie er beispielsweise beim Entleeren eines Silos auftritt.

Die Untersuchung realer Strukturen kann den jeweiligen Materialmodellen entsprechend mit unterschiedlichen Diskretisierungsmethoden erfolgen. Die Diskrete-Elemente-Methode erfordert andererseits keine Annahme über das zu erwartende Materialverhalten, weil die Bewegungsbeschreibung explizit für jedes einzelne Partikel mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms und eines mikroskopischen Kontaktmodells für die Interaktion der Partikel erfolgt [18]. Holst et al. [39] vergleichen die Ergebnisse verschiedener Berechnungen eines Modellsilos mit der Diskrete-Elemente-Methode. Die Diskrete-Elemente-Methode liefert qualitativ gute Aussagen zum Fließverhalten in Silos, erlaubt jedoch kaum Rückschlüsse auf die Spannungen innerhalb des Schüttgutes

und zwischen Granular und Silowand. Aufgrund der begrenzten Rechnerkapazität und der bislang unbekannten mikroskopischen Modellparameter ist die Diskrete-Elemente-Methode derzeit ungeeignet, die Interaktion zwischen Silowand und Schüttgut zu bestimmen.

Ein weiterer Ansatz zur Modellierung granularer Materialien ist aus der kinetischen Gastheorie dichter Gase abgeleitet. Die Beschreibung der Bewegung der Partikel nach Lun [64] und Haff [31] erfordert die Lösung von Masse-, Impuls- und Pseudoenergiebilanz, welche die Fluktuationsenergie der Partikel betrachtet und formal einer Energiegleichung entspricht. Anderson und Jackson [5] sowie Savage [83] erweitern die kinetischen Modelle um einen reibungsabhängigen Spannungsterm, welcher dauerhafte Kontakte und Mehrpartikelkonstellationen berücksichtigt. Dieser Ansatz ist aufgrund der Beschränkung auf sehr schnelle Scherströmungen und geringe Partikelkonzentrationen sowie des hohen Berechnungsaufwandes und der zu berücksichtigenden Energiebilanz für komplexe Anwendungen ungeeignet.

Kontinuumsmechanische Modelle, welche im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, bieten hingegen die Möglichkeit, komplexe Strukturen, welche die Größe der Einzelkörner weit übersteigen, abzubilden. Die Differenzialgleichungen aus Massen- und Impulsbilanz sowie dem Werkstoffmodell werden in der schwachen Form beispielsweise mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode diskretisiert. Es existieren zahlreiche Modelle zur Beschreibung einzelner Phänomene des Materialverhaltens. Der Vorteil phänomenologischer Modelle ist ihre Anpassungsfähigkeit an die Erfordernisse des betrachteten Materialverhaltens. Es sind keine Annahmen über die innere Struktur oder Wechselwirkung zwischen den Partikeln notwendig, wenn das verwendete Modell lediglich an makroskopische Beobachtungen angepaßt wird.

Granulare Materialien geringer Dichte unter großer Scherbeanspruchung können als nicht-newtonschen Flüssigkeiten betrachtet werden, deren Viskosität vom Fließzustand und somit von Scherrate, Dichte und Dichtegradient des Materials abhängt. Die Betrachtung granularer Materialien als nicht-newtonschen Flüssigkeiten erlaubt die realitätsnahe Beschreibung schneller Bewegungen, beispielsweise bei Hangrutschungen, in Suspensionen oder in Mischungsvorgängen.

Für die Beschreibung eines scherspannungsbehafteten Ruhezustandes ist eine Modellierung des Materials als Feststoff erforderlich. Zahlreiche Feststoffmodelle entstammen der Bodenmechanik, wo sowohl die Kenntnis des Verformungsverhaltens als auch die Bruchlast von Böden und Gestein von Bedeutung sind. Die Simulation großer Verformungen und schnellen Fließens ist jedoch nur mit erheblichem Aufwand möglich.

1.2 Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Modells zur Analyse des Entleerungsvorganges in Silos sowie zur Beurteilung der Standsicherheit und des Fließverhaltens.

Die Beschreibung des Entleerungsvorganges von Silos erfordert ebenso wie die Darstellung von Hangrutschungen ein Modell, welches schnellfließende und quasi-statische Bewegungszustände sowie den Phasenübergang abbilden kann. Existierende Modelle zur Beschreibung des flüssigkeits- bzw. feststoffähnlichen Materialverhaltens bilden die Grundlage für die Entwicklung eines neuen Mehrphasenmaterialmodells. Das Verhalten granularer Materialien unter großen Scherraten ähnelt dem nicht-newtonscher Flüssigkeiten, während granulare Materialien unter quasi-statischen Bedingungen als Feststoff modelliert werden können.

Die Verbindung der Vorteile beider kontinuumsmechanischer Modellannahmen führt zu der hier vorgestellten Zweiphasenformulierung. Das Gesamtmaterialverhalten folgt aus einer gewichteten Superposition aus Flüssigkeits- und Feststoffverhalten. Der Wichtungsfaktor berücksichtigt dabei den vorherrschenden Bewegungszustand, vorrangig Verzerrungsraten und Scherspannungen. Der Mehrphasenmodellansatz erlaubt mit relativ geringem numerischen Aufwand die Simulation komplexer Vorgänge, die beim Entleeren von Silos oder beim Phasenübergang zu Beginn von Hangrutschungen auftreten. Das Modell benötigt eine minimierte Anzahl von Modellparametern, welche für beide Phasen mit Hilfe standardisierter Versuche getrennt ermittelt werden können.

Die Modellierung von Siloentleerungen erfordert weiterhin die Beschreibung des Fließens unter Berücksichtigung großer Verschiebungen mit Abbildung der freien Oberfläche. Im Rahmen dieser Arbeit werden die grundlegenden kontinuumsmechanischen Bilanzgleichungen um Kopplungsbedingungen zwischen Schüttgut und Silowand sowie um die Abbildung der freien Oberfläche erweitert und mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode gelöst.

Die Anwendbarkeit des entwickelten Modells zeigen numerische Simulationen von Hangrutschungen und Schüttkegeln sowie der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen. Für die Untersuchung von Silos stehen insbesondere das Entleerungsverhalten, die hieraus resultierenden Spannungen sowie Einflüsse aus Wandsteifigkeit, Wandreibungswinkel und Silogeometrie im Mittelpunkt der Betrachtung.

2 Beschreibung granularer Materialien als nicht-newtonsche Flüssigkeiten

Granulare Materialien zeigen aufgrund ihrer Struktur große phänomenologische Ähnlichkeit zu nicht-newtonschen Flüssigkeiten. Flüssigkeiten sind in der Rheologie Materialien, welche sich unter dem Einfluß von Scherspannungen unbegrenzt verformen und in Ruhe keine Scherspannung aufweisen, sondern einen hydrostatischen Spannungszustand zeigen. Nicht-newtonsche Fluide sind Flüssigkeiten, deren Viskosität bei veränderlichen Scherspannungen nicht konstant ist. Man unterscheidet strukturviskose und dilatante Fluide je nachdem, ob die Viskosität bei steigender Verzerrungsrate ab- oder zunimmt. Weiterhin existieren Materialien, welche ein zeitveränderliches Verhalten aufweisen. Neben Granularen gehören Blut, flüssiger Zement und Bentonit dieser Materialgruppe an.

Bei Granularen geringer Dichte und bei hohen Verzerrungsraten sind Effekte zu beobachten, welche ein Feststoffmodell nicht beschreiben kann. Die Kenntnis von Mischungs- und Fließvorgängen granularer Materialien ist in der Industrie von großer Bedeutung, da während der Entleerung von Silos große verfahrenstechnische Probleme auftreten können, welche nur unter Berücksichtigung der Phänomenologie des fließenden Materials erklärbar sind. Auch bei Bergrutschen, Steinschlägen sowie Schnee- und Eislawinen findet ein Phasenübergang mit anschließendem Fließen statt, das von der Viskosität und der Hangneigung bestimmt ist. Aufgrund des großen Gefahrenpotentials dieser Naturkatastrophen ist es wichtig, einen Zusammenhang zwischen der vorhandenen Hangneigung und der zurückgelegten Entfernung zu finden.

2.1 Experimentelle Untersuchungen und Modellierungsansätze

Die Beschreibung granularer Materialien als Flüssigkeiten folgt aus einer Reihe experimenteller Beobachtungen, welche ein von der Verzerrungsrate abhängiges Materialverhalten aufzeigen. Diese Ergebnisse legen die Anforderungen an realitätsnahe Modellierungsansätze fest.

2.1.1 Reine Scherströmungen

Die ersten Versuchsergebnisse zu granularen Strömungen beruhen auf den Arbeiten von Bagnold [8]. Der Autor untersucht den Einfluß der Dichteverteilung und der Viskosität des Fluids auf das Strömungsverhalten unter reiner, konstanter Scherbeanspruchung in einer Trommel mit rotierenden Wänden. In den Experimenten sind die starren Körner stets von einer Flüssigkeit mit vorgegebener Viskosität umgeben. Der Feststoffanteil π des Granulars, welcher das Verhältnis zwischen der Dichte der Suspension ϱ und der Dichte der Einzelpartikel ϱ_S mit

$$\varrho = \varrho_S \cdot \pi \quad (2.1)$$

angibt, variiert zwischen 0,13 und 0,62 .

Bagnold unterscheidet in Abhängigkeit von Feststoffanteil der Mischung, Verzerrungsrate und Viskosität der umgebenden Flüssigkeit zwei Strömungsbereiche. Das grain-inertia-Regime beinhaltet Fließzustände, welche von Kollisionen zwischen den Körnern dominiert sind. Die unregelmäßigen Kontakte treten in Suspensionen mit geringen Feststoffanteilen $\pi < 0,55$ und bei großen Schergeschwindigkeiten auf. Aus der Betrachtung der Einzelkollisionen in der Impulsbilanz folgt eine quadratische Abhängigkeit der Scherspannung von der Verzerrungsrate. Weiterhin ist ein konstantes Verhältnis zwischen Scherspannung τ und hydrostatischem Druck p von $\tau \approx p \tan \varphi_g$ festzustellen. Der beobachtete, nahezu konstante Zusammenhang zwischen Scherspannung und Druck in den Experimenten entspricht einem dynamischen Reibungswinkel φ_g , welcher um 3 bis 4° kleiner ist als der statische. Diese Relation spiegelt das Verhältnis von Haft- zu Gleitreibung wider.

Im Gegensatz zum grain-inertia-Regime stehen die Körner im makroviskosen Regime in dauerhaftem Kontakt und Reibungskräfte dominieren. Die Geschwindigkeitsfluktuationen sind klein und es folgt eine lineare Abhängigkeit zwischen Verzerrungsrate und Spannung.

Weitere Experimente [3, 25, 85] bestätigen die Ergebnisse von Bagnold für Versuchsanordnungen mit konstantem Volumen. Andererseits zeigt die Scherspannung für eine konstante Normalbelastung ein ratenunabhängiges Verhalten, womit die Annahme des nahezu konstanten Reibungswinkel belegt wird. Versuche mit veränderlichem Volumen entsprechen dem Verhalten granularer Materialien in freier Bewegung auf einer schiefen Ebene. Wie bereits Bagnold zeigt, entsprechen die für das Granular bestimmten Werte den Normal- und Tangentialspannungen zwischen Granular und der schiefen Ebene.

2.1.2 Phasenübergänge und Dilatanz

Granulare zeigen je nach Versuchsaufbau dilatantes, reibungsbehaftetes Verhalten sowie Verflüssigung und Entmischung. Unter schnellen, geschwindigkeitsdominierten Versuchsbedingungen ist ein ähnlicher Dilatanzeffekt zu beobachten, wie ihn die Druckzunahme in Bagnolds Experimenten zeigt. Die Volumenzunahme erfordert die Abbildung von Normalspannungsunterschieden bei Scherbelastung in dem gewählten Materialmodell.

Weiterhin weisen Granulare die Fähigkeit zur Verflüssigung auf. Dabei verliert das Material die Fähigkeit Scherspannungen aufzunehmen. Der Steifigkeitsverlust führt zu Hangrutschungen und Grundbrüchen. Ebenso ist eine Entmischung von Partikeln unterschiedlicher Größe, Form und Dichte zu beobachten. Diese Aspekte werden zunächst nicht berücksichtigt, weil in dieser Arbeit ausschließlich homogenes Material behandelt wird [46].

Die Spannung innerhalb der Anordnung von Partikeln muß demnach Reibung zwischen den Partikeln, den lateralen Impulsaustausch an den Kontakten sowie die Impulsübertragung bei Kollisionen berücksichtigen. In realen Situationen sind in der Regel alle Mechanismen beteiligt. Das Materialmodell muß daher in der Lage sein, alle Einflußfaktoren zur berücksichtigen und dem aktuellen Bewegungszustand zuzuweisen.

2.1.3 Modellierungsansätze

Die zahlreichen Versuchsergebnisse für verschiedene Dichten und Verzerrungsraten motivieren eine Vielzahl unterschiedlicher Modellansätze. Unter Vernachlässigung von Temperatureinflüssen sind die Modelle auf das rein mechanische Materialverhalten beschränkt. Für große Skalen, die mehrere Partikel umfassen, verhalten sich Granulare phänomenologisch wie nicht-newtonsche Flüssigkeiten. Die Bewegungsbeschreibung erfolgt mit Hilfe der Massen- und Impulsbilanz, wobei die Spannungen vom aktuellen Fließzustand abhängen. Aufgrund unterschiedlicher Fließzustände reicht die Abhängigkeit zwischen Verzerrungsrate und Scherspannung von einem nicht-linearen Zusammenhang für schnellfließende Granulare bis zu einer vollständigen Ratenunabhängigkeit im quasi-statischen Fall.

Viele Arbeiten beruhen auf der Annahme eines verallgemeinerten Reiner-Rivlin-Fluids, das die Anpassung der Modellparameter an die zu untersuchende Strömung ermöglicht. Die Spannung setzt sich aus einem linear und einem quadratisch von der Schergeschwindigkeit abhängigen Anteil zusammen. Die zugehörigen Viskositäten folgen je nach Modell aus der Betrachtung der Kollisionen zwischen den Partikeln oder der empirischen Anpassung beider Werte an Versuchsergebnisse. Die Abbildung von Nor-

malspannungsunterschieden erfordert die Verwendung eines Modells für kompressible Materialien, welches Druck und Scherspannung in Abhängigkeit von Dichte und Feststoffanteil und deren Gradienten darstellen kann. Aufgrund der Komplexität erfolgt zu meist eine Reduktion auf vereinfachte Modelle.

Die Beschreibung der Bewegung relativ dichter, moderat schnellfließender Strömungen wie sie in den hier betrachteten Beispielen auftritt ist mit Berücksichtigung der inneren Reibung möglich. Die zum Fließen vorausgesetzte Grenzscherspannung wird zur kollisionsdominierten Scherspannung addiert und in die Viskosität eingebunden. Hiermit ist die Beschreibung einer Bewegung nahe dem Ruhezustand möglich, welcher durch die Grenzscherspannung charakterisiert ist.

2.2 Phänomenologische, ratenabhängige Modelle

Aufbauend auf den Beobachtungen Bagnolds und abgeleitet von Modellen für das Verhalten dünner Gase, folgen eine Reihe von Materialmodellen. Es existieren unterschiedliche Modelle für die Beschreibung von inkompressiblem sowie kompressiblem Materialverhalten.

2.2.1 Modellierung inkompressibler granularer Fluide

Für schnelle Strömungen granularer Materialien dominieren Kollisionen das Fließverhalten. Somit muß der Spannungszustand, welcher in der Impulsbilanz berücksichtigt ist, den Impulsaustausch und den Energieverlust der inelastischen Kontakte abbilden. Schon Bagnold bestimmte aus der Kollisionshäufigkeit in Abhängigkeit des Feststoffanteils π eine quadratische Abhängigkeit der Scherspannung τ von der Verzerrungsrate \mathbf{D} , welche in eine Formulierung nach Reiner-Rivlin

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{D}) = -p \mathbf{1} + \Phi_1 \mathbf{D} + \Phi_2 \mathbf{D}^2 \quad (2.2)$$

eingebunden wird, wobei $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$. Die Scherspannung $\boldsymbol{\tau}$ entspricht der Deviatorspannung des Fluids. Hierbei sind p der Druck, \mathbf{D} die Verzerrungsgeschwindigkeit und Φ_1 und Φ_2 Faktoren, welche Viskositäten darstellen. Die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} ist der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten und folgt aus der Geschwindigkeit \mathbf{v} zu

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T). \quad (2.3)$$

Zur Sicherstellung der Objektivität des Spannungstensors \mathbf{T} ist es erforderlich, die Viskositäten in Abhängigkeit von den Invarianten des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit, J_1^D , J_2^D und J_3^D , auszudrücken. So bestimmt bereits Bagnold an dem in Bild 2.1

schematisch dargestellten Versuchsaufbau die Scherspannung τ in der betrachteten Suspension zu

$$\tau_k(\mathbf{D}) = 0,042\lambda d^2(dU/dr)^2 \quad \text{und} \quad \tau_v(\mathbf{D}) = 2,25\lambda^{3/2}\eta(dU/dr) \quad (2.4)$$

für kollisionsdominierte (k) und für viskose (v) Strömungen mit dem Konzentrationsbeiwert $\lambda = 1/\left((\pi_{max}/\pi)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$, dem Partikeldurchmesser d , der Viskosität der umgebenden Flüssigkeit η und dem Geschwindigkeitsgradienten $dU/dr = D_{rr}$. Im Diagramm in Bild 2.1 ist die Scherspannung τ entlang der äußeren Berandung des Gebiets über dem Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten für verschiedene Feststoffanteile aufgetragen.

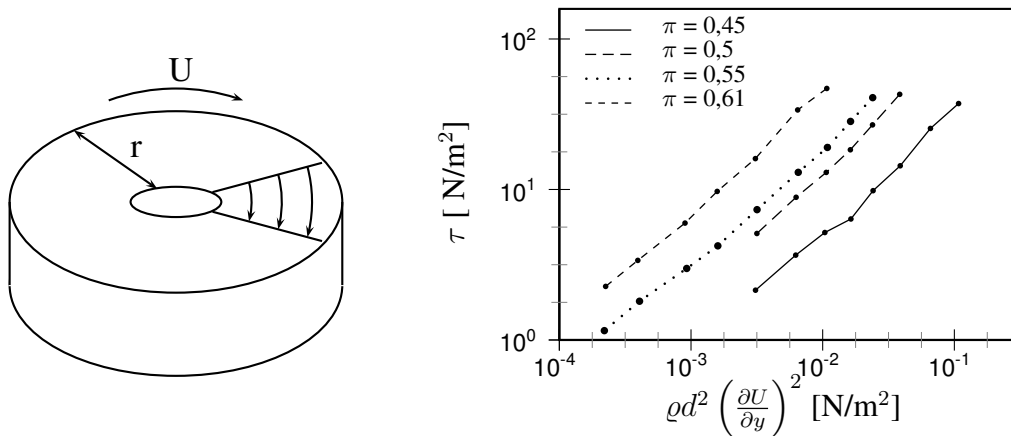


Bild 2.1: Schematischer Versuchsaufbau und Ergebnisse [8]

2.2.2 Berücksichtigung der Kompressibilität

Weiterhin ist ein Zusammenhang zwischen den Ersatzviskositäten und der Dichte, ausgedrückt in Feststoffanteilen π , zu beachten. Somit folgt

$$\Phi_1 = f(\mathbf{D}, \pi, \nabla \pi) \quad , \quad \Phi_2 = f(\mathbf{D}, \pi, \nabla \pi) . \quad (2.5)$$

Die Berücksichtigung des Gradienten des Feststoffanteils ermöglicht die Darstellung von Normalspannungsunterschieden. Eine Verallgemeinerung des Modells nach Reiner-Rivlin stellt Massoudi [67] vor, der die Spannung \mathbf{T} ebenfalls in Abhängigkeit von Verzerrungsrate und Dichte definiert als

$$\mathbf{T} = \{\beta_0 + \beta_1 \nabla \pi \cdot \nabla \pi + \beta_2 \text{tr } \mathbf{D}\} \mathbf{1} + \beta_3 \mathbf{D} + \beta_4 (\nabla \pi \otimes \nabla \pi) . \quad (2.6)$$

Diese Formulierung hat große Ähnlichkeit mit Modellen, welche aus der kinetischen Gastheorie abgeleitet werden, ist jedoch aufgrund der Vielzahl von unbekannten Faktoren β_i nur in vereinfachter Form anwendbar.

So ermittelt Elaskar [24] die Vorfaktoren entsprechend einer nichtassozierten Fließregel nach von Mises unter Berücksichtigung der viskoplastischen Effekte nach Perzyna [74]. Den Einfluß der Faktoren β_i auf die Geschwindigkeits- und Feststoffanteilsverteilung in einem Rohr stellt Gudhe [30] vor.

McTigue [68] definiert einen dissipativen Spannungsanteil in Abhängigkeit der Kollisionshäufigkeit. Dabei folgt aus der Betrachtung der Zusammenstöße zwischen zwei Partikeln ein Impulsaustausch, der über das gesamte Gebiet gemittelt zu der Materialgleichung

$$\boldsymbol{\tau} = \eta_1(\pi - \pi_{max})^{-2} \sqrt{J_2^D} \mathbf{D} - \eta_2(\pi - \pi_{max})^{-2} \mathbf{D}^2 \quad (2.7)$$

führt. Dabei ist π_m der maximale Feststoffanteil und η_1 und η_2 Materialkennwerte. Der hydrostatische Druck p des kompressiblen, nicht-newtonschen Fluids folgt nach Goodman und Cowin [28] aus der Ableitung der freien Helmholtzenergie zu

$$p = \alpha(\pi^2 - \pi_c^2) \quad (2.8)$$

mit dem kritischen Feststoffanteil π_c , der eine Beschränkung der Gültigkeit des Modells bewirkt, und der Kompressibilität α .

Die bisher beschriebenen Materialgleichungen bilden das Verhalten granularer Materialien in schnellen Scherströmungen sehr gut ab, sind jedoch nicht in der Lage längerfristige Kontakte mehrerer Partikel zu berücksichtigen. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit ein quasi-statischer Reibungsterm in das Modell eingebunden.

2.3 Modell für die Beschreibung reibungsbehafteter Fluide

Modelle, welche ausschließlich die kurzfristigen Kollisionen zwischen den Partikeln eines granularen Materials berücksichtigen, vernachlässigen die Spannung innerhalb des Materials, die auf reibungsbehaftete Kontakte zurückgeht. Daher ist es insbesondere für Granulare hoher Dichte erforderlich, die Spannungen infolge Reibung zusätzlich einzubeziehen.

2.3.1 Bingham'sche Flüssigkeit

Das grundlegende Modell einer Flüssigkeit, welche erst bei Überschreiten einer Grenzspannung T_f fließt, ist das Bingham'sche Flüssigkeitsmodell. Das zugehörige rheologische Modell und das Scherspannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Diagramm sind in Bild 2.2 dargestellt. Bis zum Erreichen der kritischen Scherspannung T_f erfolgt keine Bewegung, und die weitere Strömung ist ausschließlich durch die Viskosität η charak-

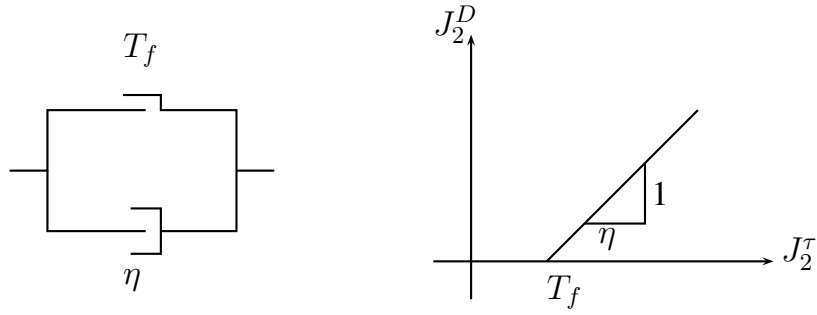


Bild 2.2: Rheologisches elastoplastisches Modell

terisiert. Daher kann man das Materialverhalten mit

$$J_2^D = \begin{cases} \frac{1}{\eta}(J_2^\tau - T_f) & \text{für } J_2^\tau > T_f \\ 0 & \text{für } J_2^\tau \leq T_f \end{cases} \quad (2.9)$$

beschreiben. J_2^D und J_2^τ sind die zweiten Invarianten der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} und der Scherspannung $\boldsymbol{\tau}$. Die Spannung für den Fließzustand der Flüssigkeit folgt anschließend aus den Gleichungen (2.9) und (2.2).

2.3.2 Erweiterte, reibungsbehaftete Fluidmodelle

Viele Autoren [14, 68, 83] führen zusätzlich zu dem Spannungsanteil für schnelle Scherströmungen aus Abschnitt 2.2 einen ratenunabhängigen Anteil ein, der die Scherspannung im quasi-statischen Zustand entsprechend T_f in (2.9) darstellt. Für granulare Materialien beschreibt das verallgemeinerte Fließgesetz nach Mohr-Coulomb das Materialverhalten im Grenzzustand. Die Scherspannung infolge Reibung T_f ist nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit und folgt aus

$$T_f = p \sin \varphi + c \quad (2.10)$$

mit dem inneren Reibungswinkel φ und der Kohäsion c . Die Spannung T_f beschreibt zusammen mit dem Druck das Materialverhalten im plastischen Grenzzustand zu Beginn des Fließens. In Übereinstimmung mit der Reiner-Rivlin-Formulierung für schnelle Scherströmungen granularer Materialien wird die Grenzscherspannung in die Ersatzviskosität Φ_1 als

$$\Phi_1 = \Phi_1^K + \Phi_1^R \quad \text{mit} \quad \Phi_1^R = \frac{T_f}{\sqrt{J_2^D}} \quad (2.11)$$

eingebunden, wobei Φ_1^K ein konstanter Wert ist. Für verschwindende Verzerrungsgeschwindigkeiten \mathbf{D} konvergiert der Betrag der Scherspannung J_2^τ unter Verwendung von (2.2) und (2.11) gegen T_f , da

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\Phi_1^K + \frac{T_f}{\sqrt{J_2^D}} \right) \cdot \mathbf{D} \stackrel{J_2^D \rightarrow 0}{=} (0 + T_f) \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{J_2^D}} \quad (2.12)$$

Die zweite Invariante des Richtungstensors $\mathbf{D}/\sqrt{J_2^D}$ ist 1, so daß die Invariantenformulierung eine richtungstreue Abbildung der Scherspannung ermöglicht. Die Materialgleichung in Form eines Fluids mit eingebundener Grenzscherspannung kann jedoch aufgrund des verschwindenden Nenners Scherspannungen im Ruhezustand numerisch nicht exakt darstellen.

Für die Bestimmung der Ersatzviskosität Φ_1^R existieren verschiedene Herangehensweisen. So ist es möglich aus der Fließregel und dem plastischen Potential eine Viskosität abzuleiten. Für assoziiertes Fließen nach der Fließregel nach von Mises zeigt Cazacu [13], daß unter der Annahme der Inkompressibilität beide Lösungswege unter Einschränkungen identische Formulierungen liefern. Es ist jedoch nur möglich eine konsistente Formulierung aufzustellen, wenn elastische Effekte vernachlässigt werden. Somit ist die Darstellung von Normalspannungsunterschieden nicht möglich. Für viele Anwendungen ist die Annahme von volumenkonstantem plastischem Fließen jedoch zulässig. Daher wird im folgenden das Modell von Chen [14] für verallgemeinerte viskoplastische Fluide verwendet.

2.3.3 Verwendetes Materialmodell

Das in dieser Arbeit verwendete Materialmodell nach Chen [14] folgt unmittelbar aus den erweiterten, reibungsbehafteten Fluidmodellen in einer Reiner-Rivlin-Formulierung. Das Modell beschreibt vorrangig langsame, dichte Strömungen granularer Materialien.

Chen verwendet Materialgleichungen für inkompressibles Material für den gesamten Fließvorgang. Er analysiert die experimentellen Ergebnisse von Bagnold mit einem verallgemeinerten viskoplastischen Fluid, welches auf der Reiner-Rivlin-Formulierung (2.2) basiert und wählt die Ersatzviskositäten Φ_1 und Φ_2 zu

$$\Phi_1 = \frac{T_f}{\sqrt{J_2^D}} + 2\eta_1 |4J_2^D|^{(n_1-1)/2} \quad (2.13)$$

$$\Phi_2 = 4\eta_2 |4J_2^D|^{(n_2-2)/2} . \quad (2.14)$$

Die Viskositäten η_1 und η_2 beschreiben Materialeigenschaften, während die Exponenten n_1 und n_2 Modellparameter zur Unterscheidung des Fließzustandes sind. Chen zeigt, daß die Exponenten n_1 und n_2 zwischen den Werten 1,0 für makroviskose und 2,0 für schnelle Scherströmungen variieren. Somit ist eine Modellierung grundlegender Verhaltensweisen granularer Materialien im strömenden Zustand möglich. Die Formulierung nach Chen findet daher in dem in dieser Arbeit vorgestellten Materialmodell Anwendung.

Es folgt die Anpassung der Modellparameter des Modells nach Chen an Bagnolds Versuche. Der rotationssymmetrische Scherversuch zwischen zwei gegenläufig rotierenden Platten erzeugt einen nahezu einachsigen Spannungszustand innerhalb des Granulars. Daher erfolgt die Bestimmung der Parameter in dem in Bild 2.3 dargestellten Berechnungsgebiet, welches einem Ausschnitt des Versuchsaufbaus, Bild 2.1, entspricht. Als Randbedingung ist ein konstanter Druck und eine konstante Randlast vorgegeben. Weiterhin koppelt eine Zwangsbedingung die Geschwindigkeit am Einströmrand mit der Geschwindigkeit des ausströmenden Materials.

Chen ermittelt die Faktoren η_1 und η_2 aus Gleichung (2.14) in Abhängigkeit des Strömungszustandes des Granulars zu

$$\eta_1 = \alpha_1 \varrho_s^{n_1-1} d^{2(n_1-1)} \eta_f^{2-n_1} \eta_*(\pi) \quad (2.15)$$

$$\eta_2 = -\alpha_2 \varrho_s^{n_2-1} d^{2(n_2-1)} \eta_f^{2-n_2} \eta_*(\pi), \quad (2.16)$$

mit der Viskosität $\eta_*(\pi) = (1 - \pi/\pi_{max})^{B*\pi_{max}}$. Der Koeffizienten B nimmt für dichte Suspensionen einen etwas höheren Wert an als den von Einstein ermittelten Wert von 2,5. Die Anpassung erfolgt für die Variablen α_1 und n_1 mittels einer Fehlerminimierung. Für variierende Volumenanteile und Schergeschwindigkeiten ermittelt Chen eine Abhängigkeit der Parameter von Bagnolds Kennzahl. Aufgrund der relativ hohen Dichte in den weiteren Anwendungen erfolgt hier nur die Anpassung für Volumenanteile π von 0,5 bzw. 0,55. In Bild 2.3 ist die berechnete Scherspannung τ an der Oberkante des Gebiets in Relation zu Bagnolds Kennzahl unter Verwendung der aufgelisteten Parameter aufgetragen. Dabei wird ein linearer Verlauf der Geschwindigkeit zur Bestimmung der Verzerrungsgeschwindigkeit angenommen.

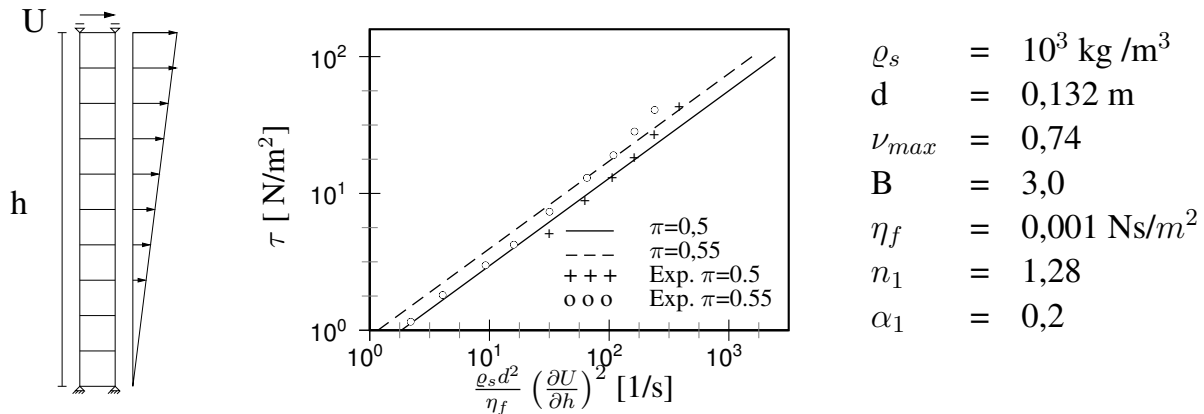


Bild 2.3: Vergleich ausgewählter Parameter mit Versuchsergebnissen

Aufgrund der guten Übereinstimmung der mit dem Modell nach Chen ermittelten Werte mit den experimentellen Ergebnissen wird hier für die Berechnung realer Strömungen granularen Materials dieses Modell verwendet. Es ermöglicht neben der Abbildung reibungsbehafteter Kontakte auch eine von der Strömungsgeschwindigkeit und der Dichte

abhängige Viskosität und ist daher geeignet, granulare Materialien in unterschiedlichen Anwendungen zu beschreiben.

2.4 Darstellung des Strömungsverhaltens granularer Materialien

Neben der Anpassung der Modellparameter an bestehende experimentelle Ergebnisse ist es erforderlich, das Strömungsverhalten des granularen Materials zu beschreiben. Daher folgt im weiteren eine Darstellung des Einflusses der inneren Reibung auf das Geschwindigkeitsprofil in einer Kanalströmung mit und ohne Hindernis. Desweiteren ermöglicht die Einführung eines Regularisierungsparameters ϵ die Unterscheidung des Fließzustandes in feste und flüssige Bereiche.

2.4.1 Strömung in einem Kanal

Das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Kanalströmung eines reibungsbehafteten Fluids wird an dem in Bild 2.4 dargestellten Beispiel veranschaulicht. Aufgrund der

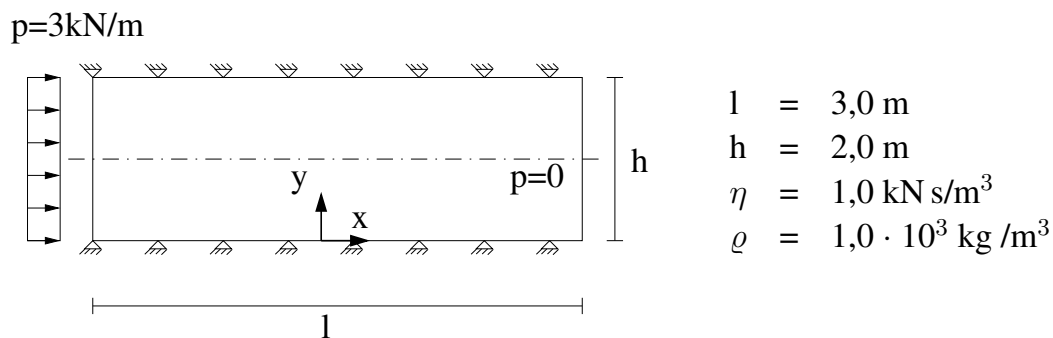


Bild 2.4: Geometrie und Modellparameter für Rohrströmung

Symmetrie ist die Berechnung nur für die Hälfte des Kanals erforderlich. Bild 2.5 zeigt nur den Einfluß des inneren Reibungswinkels φ , da weder die Viskosität noch die Dichte des Materials eine qualitative Veränderung des Fließprofils bewirken.

Aus dem Modell für $\varphi = 0$ folgt ein parabolisches Fließprofil wie für ein newtonsches Fluid, während für steigende Reibungswinkel der Gradient der Schergeschwindigkeit auf die Randzone beschränkt ist. In einem Fluid ohne innere Reibung φ verlaufen die Scherspannungen linear über den Querschnitt, weil die Viskosität konstant ist. Für reibungsbehaftete Fluide treten aufgrund des Ansatzes (2.11) große Unterschiede in Viskosität und Verzerrungsrate zwischen Randzonen und Kanalmitte auf.

In der Mitte des Kanals, nahe der Symmetrieachse, konvergiert die Verzerrungsgeschwindigkeit gegen Null und die Viskosität steigt an. Daher verhält sich das Material

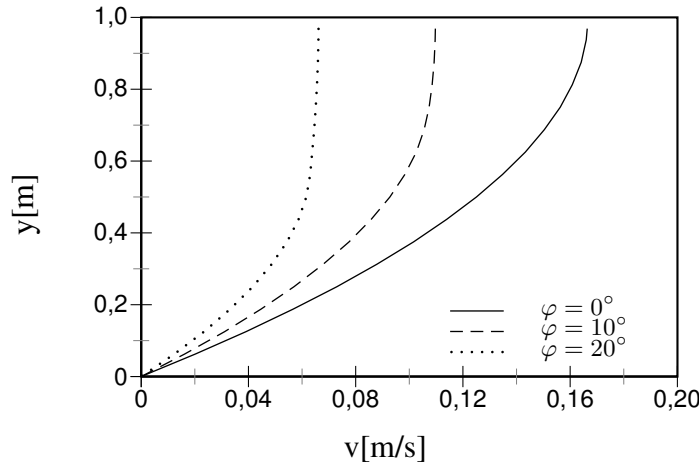


Bild 2.5: Fließprofil mit variablem Reibungswinkel

in dieser Region fast wie ein starrer Körper, welcher sich mit konstanter Geschwindigkeit durch den Kanal bewegt.

Andererseits treten entlang der Kanalwand mit Hafttrandbedingung große Geschwindigkeitsgradienten auf, die zu verringerter Viskosität nach (2.11) führen. Das Material im randnahen Bereich befindet sich in einem Strömungszustand, welcher mit einer lokalen Scherzone vergleichbar ist. Das Beispiel zeigt bereits die mögliche Unterscheidung in fließende Regionen und Zonen mit starrem Material und die Ausbildung von Scherzonen.

2.4.2 Regularisierung der reibungsbehafteten Scherspannung

Für die Unterscheidung von Fließzuständen und für die numerische Berechnung der im reibungsbehafteten Fluid auftretenden Spannungen ist die Einführung einer Regularisierung erforderlich. Der Reibungsanteil der Spannung nach (2.11) läßt sich nur für Verzerrungsgeschwindigkeiten $J_2^D > 0$ numerisch bestimmen. Analytisch folgt für den Ruhezustand eine Scherspannung der Größe T_f . Aufgrund der getrennten Berechnung der Viskosität Φ_1 und der Spannung $\tau^F(\mathbf{D}) = \Phi_1 \mathbf{D}$ muß der Reibungsterm reguliert werden, um eine Division durch Null zu vermeiden. Zisis [104] zeigt für eine Bingham'sche Flüssigkeit verschiedene Regularisierungsmethoden, wobei im Folgenden nur der Ansatz mit

$$\Phi_1^R = \frac{T_f}{\sqrt{J_2^D} + \epsilon} \quad (2.17)$$

verwendet wird. Der Parameter ϵ sollte möglichst klein sein, aber die Rechnergenauigkeit nicht unterschreiten. Ohne die Erweiterung entsprechend (2.17) ist eine ratenunabhängige Formulierung für die Spannung im Ruhezustand notwendig, welche eine numerisch instabile Änderung des Gleichungssystems für $J_2^D \rightarrow 0$ zur Folge hat. Die Ein-

führung des Parameters ϵ ermöglicht weiterhin eine Abgrenzung in starre und fließende Zonen innerhalb des Materials. Bild 2.6 zeigt die Scherspannungs-Verzerrungsraten-

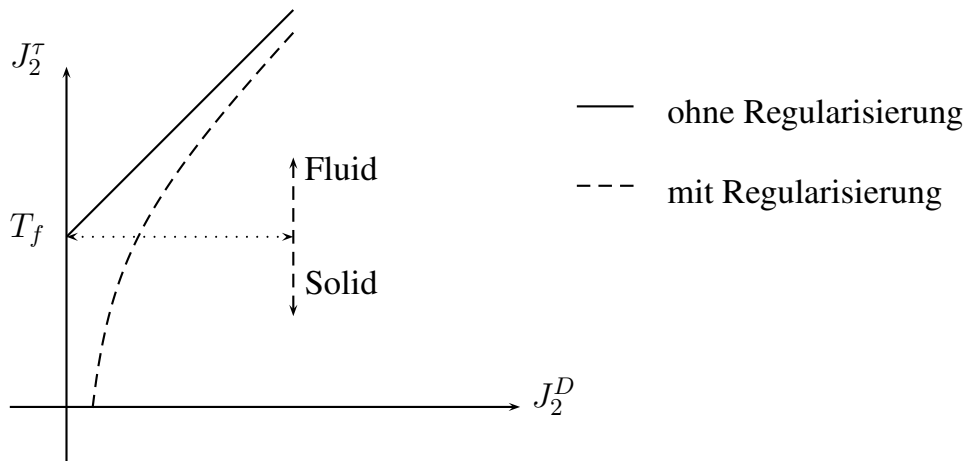


Bild 2.6: Materialmodell mit Verwendung einer Regularisierung

Relation mit und ohne Verwendung einer Regularisierung. Der unstetige Funktionsverlauf ohne Regularisierung verdeutlicht die bereits beschriebenen Probleme in der Formulierung. Andererseits ermöglicht die Ausrundung eine eindeutige Zuordnung zwischen den Zustandsgrößen \mathbf{D} und $\boldsymbol{\tau}$. Je geringer der Wert des Regularisierungsparameters, desto besser wird die zunächst unstetige Funktion approximiert. Zisis unterscheidet starre und fließende Zonen mit Hilfe der Betrachtung der vorhandenen Scherspannung, welche er in Relation zur Grenzscherspannung T_f setzt. Er verwendet somit eine einheitliche Formulierung und bestimmt den Fließzustand des Granulars aus den berechneten Größen. Die Fließzahl Z_F , welche ein Maß für den Fließzustand ist, wird als

$$Z_F = T_f / J_2^\tau \quad (2.18)$$

definiert und ist somit für den festen Zustand größer als 1,0.

2.4.3 Bestimmung der Fließregionen

Wie beschrieben ist es möglich, zwischen Fließzuständen mittels Vergleich der aktuellen Scherspannung mit der Fließgrenze zu unterscheiden. Zur Veranschaulichung des Vorgehens wird ein umströmter Zylinder in einem Kanal betrachtet wie er in Bild 2.7 dargestellt ist. Der Zylinder ist symmetrisch zur Mittelachse angeordnet, um eine unsymmetrische Wirbelablösung zu verhindern. Aufgrund der hohen Viskosität reibungsbehafteter Fluide ist die Reynoldszahl sehr gering, und es treten keine turbulenten Effekte auf. Als Randbedingung ist eine Druckdifferenz sowie eine Randlast auf dem Einströmrand vorgegeben. Die Durchströmung erfolgt von links nach rechts mit Haftrandbedingungen an den horizontalen Rändern. In dem Kanalabschnitt links des Zylinders

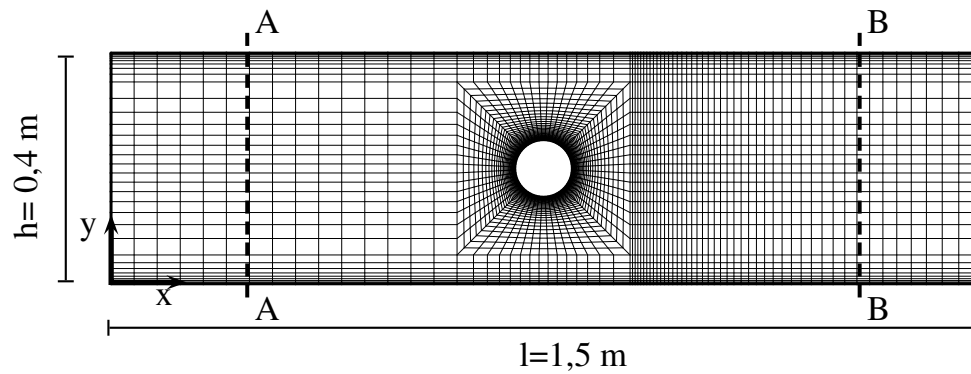


Bild 2.7: Räumliches Finite-Element-Netz mit 256 Elementen

bildet sich ein nahezu homogenes, laminares Geschwindigkeitsprofil aus. Entlang des Randes treten aufgrund der Haftbedingung hohe Geschwindigkeitsgradienten auf, so daß das Material in diesen Bereichen fließt. In Abhängigkeit vom inneren Reibungswinkel φ bildet sich eine Zone nahezu konstanter Geschwindigkeit aus, in welcher die Scherkräfte die Grenzscherspannung nicht überschreiten. Diese Bereiche sind in den Bildern 2.8 und 2.9 dunkel dargestellt, wenn die Fließzahl den Wert 1,0 übersteigt.

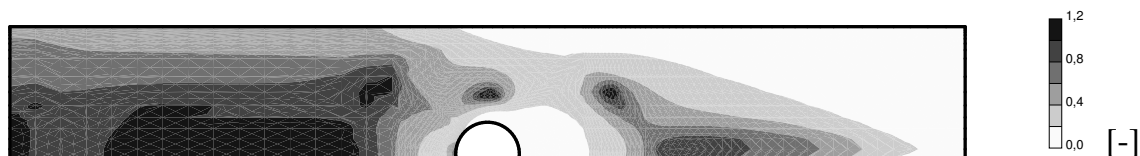


Bild 2.8: Verteilung der Fließzahl Z_F für $\varphi = 5^\circ$

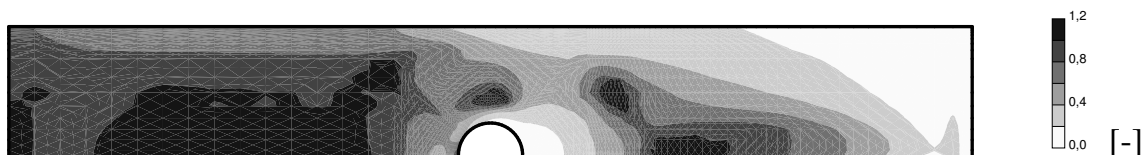


Bild 2.9: Verteilung der Fließzahl Z_F für $\varphi = 10^\circ$

Im Bereich des Zylinders nimmt die Fließzahl ab, wenn der Geschwindigkeitsgradient und somit die Scherspannung ansteigt. Im Nachlaufbereich resultiert aus dem geringeren Druck eine geringere Grenzscherspannung nach dem Mohr-Coulombschen Fließkriterium (2.10). Deshalb übersteigen die auftretenden Scherspannungen infolge des Geschwindigkeitsgradienten die Grenzscherspannung. Die Fließzahl ist somit kleiner als 1,0 und der feste Bereich beschränkt sich auf eine schmale Zone entlang der Symmetrieachse. Auftretende Sprünge in den dargestellten Fließzahlen in den Bildern 2.8 und 2.9 folgen aus der knotenweisen Darstellung der Fließzahl, welche aus den Elementspannungen bestimmt wird.

Bild 2.10 verdeutlicht den Einfluß des Reibungswinkels auf die Fließzahl anhand der Schnitte entlang der in Bild 2.7 abgebildeten Linien A-A und B-B. Es ist ersichtlich, daß die Zone festen Materials sich in Abhängigkeit vom gewählten Reibungswinkel φ einstellt. Das linke Bild stellt einen nahezu ungestörten Fließzustand bei relativ hohem Druck dar. Für $\varphi=5^\circ$ ist die Strömung durch die Schergeschwindigkeit dominiert und die Reibungseffekte sind in der Mitte konzentriert. Bei steigendem Reibungswinkel steigt der Einfluß der Reibung auch entlang des Randes. Im rechten Bild, welches den Nachlaufbereich mit geringerem Druck darstellt, ist die Fließzahl für große Reibungswinkel wiederum größer als für kleinere Reibungswinkel, erreicht jedoch den Wert 1,0 nicht. Daher fließt das gesamte Material.

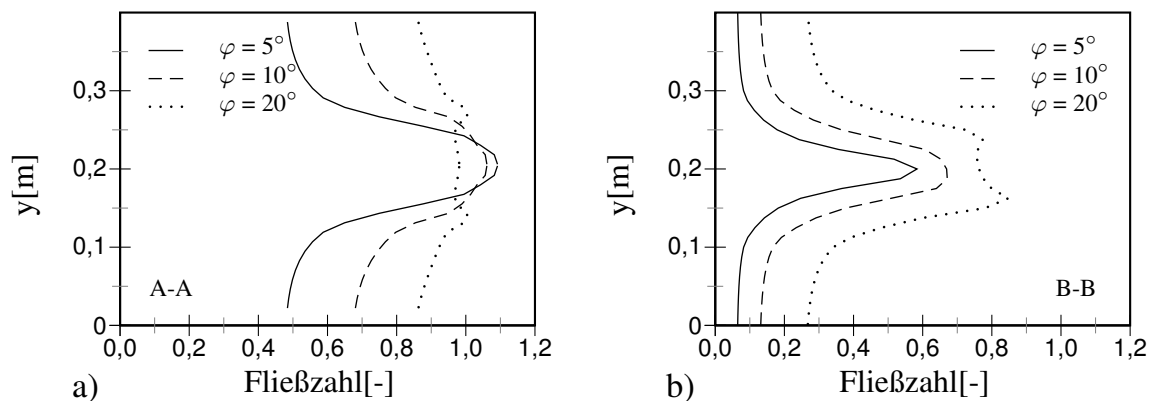


Bild 2.10: Fließzahl in Schnitten a) A-A und b) B-B für verschiedene φ

3 Beschreibung granularer Materialien als Festkörper

3.1 Einführung

Feststoffmodelle beschreiben bei Granularen auftretende Phänomene, welche mit Hilfe der im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Betrachtungsweise als Flüssigkeit nicht darstellbar sind. Es existieren aus der Bodenmechanik stammende Modellierungsansätze, welche für ein großes Spektrum unterschiedlicher Materialien und Anwendungen einsetzbar sind. Einführungen in die Materialmodellierung von Böden sind in [19] und [20] angegeben.

Für die Beschreibung des Entleerens von Silos ist es zunächst erforderlich, den Füllzustand zu kennen [66]. Das Granular weist im quasi-statischen Ruhezustand eine maximal um den Böschungswinkel geneigte Oberfläche auf. Weiterhin existieren vor Beginn des Fließens Scherkräfte innerhalb des Materials, welche mittels Reibung auf die Silowand übertragen werden. Daher stellt sich in Abhängigkeit von Silodurchmesser und Trichterneigung eine nichtlineare Druckverteilung über die Höhe ein.

Die auftretenden Belastungen in Silos sind um ein Vielfaches geringer als in Strukturen aus der Geotechnik. Trotzdem können viele Konzepte aus vorhandenen Materialmodellen auf die betrachteten Anwendungen übertragen werden. Es folgt eine Zusammenfassung der Anforderungen an das zu beschreibende Materialverhalten, der daraus abgeleiteten häufig verwendeten Modelle sowie deren Anwendung. Aus der erforderlichen Darstellung einer Fließgrenze und des beginnenden Fließens folgt die Wahl eines viskoplastischen Materialmodells, dessen Grundlagen im folgenden erläutert sind.

3.1.1 Eigenschaften granularer Feststoffe

Ebenso wie im fließenden Zustand sind die Eigenschaften ruhender, granularer Materialien unmittelbar abhängig von den gegebenen Randbedingungen wie Umgebungsdruck, Dichte des Materials und Drainagezustand. Aus Standardversuchen der Bodenmechanik, vorrangig aus Triaxial- und Ödometerversuchen, folgt ein Spannungs-Verformungsverhalten, das abhängig vom Belastungspfad ist. Nach kleinen elastischen Verformungen können große irreversible Verformungen auftreten. Der Grenzzustand der Tragfähigkeit eines granularen Materials bestimmt die Ausbildung von Böschungsbrüchen sowie die maximale Hangneigung eines Schüttkegels. Das Entstehen von

Scherfugen und das Versagen der Proben liefern Anhaltspunkte über die Grenzzustände der Tragfähigkeit des granularen Materials, welche in direkten Scherversuchen bestimmt werden. Weiterhin zeigt Herle [35] den Einfluß der Einzelkörner auf das Gesamttragverhalten. Dabei stellen insbesondere Kornform und Rauigkeit wesentliche Parameter dar.

Die meisten Versuchsergebnisse spiegeln das Materialverhalten für relativ hohe Feststoffanteile des Gesamtgefüges und hohe Dichten wider. In der Verfahrenstechnik ist es hingegen entscheidend, das Verhalten für geringe Dichten zu bestimmen. Insbesondere die Fließgrenze entspricht für geringe Dichten nicht der aus der Bodenmechanik bekannten Mohr-Coulomb-Geraden. Die in der Bodenmechanik aus Sicherheitsgründen erwünschte Unterschätzung der Tragfähigkeit des Granulars führt in der Verfahrenstechnik zu einer unerwünschten Fehleinschätzung des Fließverhaltens.

3.1.2 Anforderungen an die Modellierung

Es ist nahezu unmöglich, alle auftretenden Phänomene im Verhalten granularer Materialien in einem Modell abzubilden. Daher existiert ein Vielzahl unterschiedlicher Modellvorstellungen, die fallabhängig gute Ergebnisse liefern. Aufgrund des komplexen Vorgangs des Entleerens von Silos und der Modellierung des Phasenübergangs von einem granularen Festkörper zu einem nicht-newtonschen Fluid sind die Robustheit und der numerische Aufwand zur Lösung der verwendeten Modellgleichungen im vorliegenden Fall von besonderer Bedeutung. Die Wahl des Modells begrenzt die erforderlichen Parameter auf einige, mit Hilfe von Standardversuchen ermittelbare Kenngrößen granularer Materialien. Der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz mit einem kontinuierlichen Übergang von einem Feststoffmodell zu einem Modell für nicht-newtonschen Flüssigkeiten erfordert die Darstellung des Ruhezustandes sowie die Vorgabe des anfänglichen Fließens für den anschließenden Phasenübergang.

3.1.3 Modellierungsansätze

Hyperelastizität und Hypoelastizität. Modelle für elastisches Materialverhalten beschreiben vollständig reversibles Verformungsverhalten. Die Hyperelastizität ist ein Sonderfall der Elastizitätstheorie nach Cauchy, der ein elastisches Potential zugrundeliegt. Das Modell findet aufgrund des in Versuchen kaum meßbaren elastischen Bereichs für granulare Materialien wenig Anwendung. Der elastische Grundkörper in der Rheologie ist eine einzelne Feder wie sie in Bild 3.1 dargestellt ist.



Bild 3.1: Rheologisches Modell der Elastizität

Das Materialmodell der Hypoelastizität geht auf Truesdell [97] zurück. Es beschreibt unbeschränktes Fließen und ermöglicht aufgrund der inkrementellen Formulierung die Abbildung pfadabhängigen Verhaltens. Das Modell ist abhängig von der Verzerrungsrate und kann in eine Formulierung überführt werden, welche inelastisches Materialverhalten beschreibt. Daher ist die Modellierung von plastischem Verhalten unter Verwendung von Fließregeln möglich.

Hyperplastizität und Hypoplastizität Modelle für hyperplastische Materialien umfassen mehrere Potentialfunktionen in Abhängigkeit von Spannungspfad und Belastungsniveau. Somit sind entsprechend viele Schaltfunktionen zwischen den Potentialen erforderlich. Die inkrementell nichtlineare Formulierung ist sehr aufwendig und wird meist durch Modelle ersetzt, welche die plastischen Verformungen ohne die Verwendung von Potential und Schaltfunktionen bestimmen. Modelle für hypoplastisches Verhalten sind in Deutschland eng mit der Forschergruppe um Gudehus und Kolymbas [29, 58] verbunden und stellen einen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsrate her. Es existiert keine Aufteilung in einen elastischen und plastischen Bereich. Der größte Nachteil der Formulierung ist die Bestimmung der erforderlichen Kenngrößen des Materialmodells, welche nicht unmittelbar aus bekannten Versuchskenngrößen folgen. Aufgrund der fehlenden Daten wird daher für die Simulation des Materialverhaltens mit Phasenübergang auf weniger komplexe Modelle zurückgegriffen, welche auf physikalisch eindeutig definierten Größen basieren.

Plastizität Der am häufigsten verwendete Modellansatz zur Beschreibung granularer Materialien ist die Elastoplastizität, wie z.B. in [60, 73]. Der Modellansatz beruht auf experimentellen Beobachtungen, die mit Hilfe mathematischer Methoden verallgemeinert werden. Die Verwendung einer Fließfläche $f(\mathbf{T}) = 0$ erlaubt die Abgrenzung zwischen elastischen und plastischen Verformungen. Eine Darstellungsform der Elastoplastizität liefert das rheologische Modell in Bild 3.2, das durch Einbindung eines Reibgliedes die Fließgrenze berücksichtigt. Nach Erreichen der Fließgrenze erfolgt

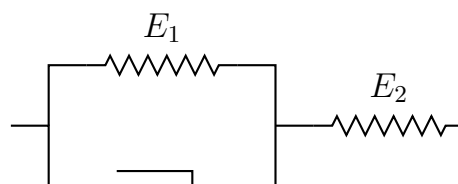


Bild 3.2: Rheologisches elastoplastisches Modell

eine weitere Verformung unter Vernachlässigung der Federsteifigkeit E_1 ohne zusätzliche Krafteinwirkung, d. h. das Material fließt. Der Vorteil von Modellen für elastoplastisches Material besteht in der eindeutigen Bestimmbarkeit eines Grenzzustandes, der Fließbedingung, und der daraus resultierenden direkten Anpassung an Versuchsergebnisse. Zur Verwendung in einer Zweiphasenformulierung in Kombination mit einer nicht-newtonschen Flüssigkeit ist es von Nachteil, daß die Spannung ohne Berücksichtigung komplexer Verfestigungsmodelle stets über eine Fließfläche bestimmt ist und somit nicht unabhängig vom Belastungspfad zu bestimmen ist.

3.2 Viskoplastizität

Das in dieser Arbeit verwendete Modell für viskoplastische Materialien beschreibt neben plastischen Verzerrungen auch Verzerrungsgeschwindigkeiten und erlaubt somit die Darstellung von Phänomenen wie Relaxation und Kriechen. Viskoplastische Modelle finden vorrangig zur Beschreibung des Materialverhaltens von Metallen Verwendung. Ebenso wie Modelle für elastoplastisches Materialverhalten besitzen sie eine Fließgrenze, die jedoch keine Beschränkung der Spannung darstellt, sondern den Beginn des Fließvorganges kennzeichnet. Daher eignet sich die Viskoplastizität zur Erstellung eines konsistenten Modells zur Beschreibung des Phasenüberganges zu flüssigem Materialverhalten in granularen Materialien.

3.2.1 Phänomenologie

Rheologische, viskoplastische Modelle basieren auf einer Reihenschaltung eines Bingham'schen Körpers, welcher in Bild 2.2 abgebildet ist, und einer elastischen Feder. Bild 3.3 verdeutlicht das rein elastische Verhalten bis zur Fließgrenze sowie das anschließende viskose Verhalten.

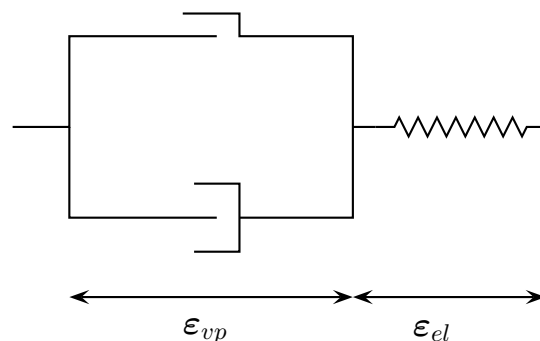


Bild 3.3: Rheologisches viskoplastisches Modell

Es existieren viele hieraus abgeleiteter Modelle, wobei der Ansatz nach Hohenemser & Prager [37] auf der Aufteilung der Verzerrungen in einen elastischen und einen viskoplastischen Anteil

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{vp} \quad (3.1)$$

beruht. Perzyna [74] hingegen betrachtet die Verzerrungsraten

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} , \quad (3.2)$$

wobei die viskoplastischen Verzerrungen keine Spannung hervorrufen. Die Spannung folgt somit ausschließlich aus den elastischen Verzerrungen und dem zugehörigen Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$

$$\dot{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{C}} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}) . \quad (3.3)$$

Die Bestimmung der Spannung erfordert Aussagen über die Größe der inelastischen Verzerrungen. Größe und Richtung der viskoplastischen Verzerrungsrate nach Überschreiten der Fließgrenze folgen aus der aktuellen Spannung und den das Fließverhalten betreffenden Modellparametern.

3.2.2 Fließgrenzen

Das vorrangige Ziel der Standardversuche der Bodenmechanik ist die Bestimmung der Tragfähigkeit von Böden und somit der Fließgrenze, welche auch als Fließkriterium oder Fließbedingung bekannt ist. Für metallische Werkstoffe ist die Fließgrenze unabhängig von der ersten Invarianten des Spannungstensors $J_1^T = \text{tr } \mathbf{T} = -3p$. Die Fließgrenze ist ausschließlich von der zweiten Invarianten der Deviatorspannung $\boldsymbol{\tau}$, $J_2^\tau = 1/2 \boldsymbol{\tau}_{ij} \boldsymbol{\tau}_{ji}$, abhängig und folgt mit dem Modellparameter k_m aus dem Fließkriterium nach von Mises

$$f = J_2^\tau - k_m^2 = 0 . \quad (3.4)$$

Für reibungsbehaftete Materialien zeigen Triaxialversuche eine druckabhängige Tragfähigkeit. Die Tragfähigkeit wird bei Erreichen der maximal aufnehmbaren Scherspannung T_f ermittelt, welche aus dem Mohr-Coulombschen-Fließkriterium

$$T_f = c + p \tan \varphi \quad (3.5)$$

resultiert. Eine Darstellung der Fließgrenze geht auf Drucker und Prager zurück und ist für Kompression und Extension als

$$f = \alpha J_1^T - \sqrt{J_2^\tau} - k = 0 \quad (3.6)$$

mit den Parametern α und k definiert, welche im ebenen Verzerrungszustand aus

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad k = \frac{3}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \quad (3.7)$$

folgen [19]. Das Modell überschätzt die Tragfähigkeit im Kompressionsbereich. Für die verfahrenstechnische Auslegung von Silos folgt daraus jedoch eine Unterschätzung der Fließfähigkeit und somit eine unkritische Überdimensionierung.

Es existieren weitere Modellierungsansätze [16, 60], die jedoch aufgrund der erforderlichen großen Anzahl an Parametern im vorliegenden Fall ungeeignet sind. Für die exakte Beschreibung des Fließverhaltens von Schüttgütern ist es erforderlich, die Fließgrenze für Materialien geringerer Dichte als in der Bodenmechanik üblich zu bestimmen. Der von Jenike [51, 88] definierte dichteabhängige Fließort besitzt im Bereich kleiner Druckspannungen einen gekrümmten Verlauf. Der innere Reibungswinkel φ_i ist somit nicht konstant, sondern von Dichte ϱ und Spannung σ abhängig, wie in Bild 3.4 dargestellt.

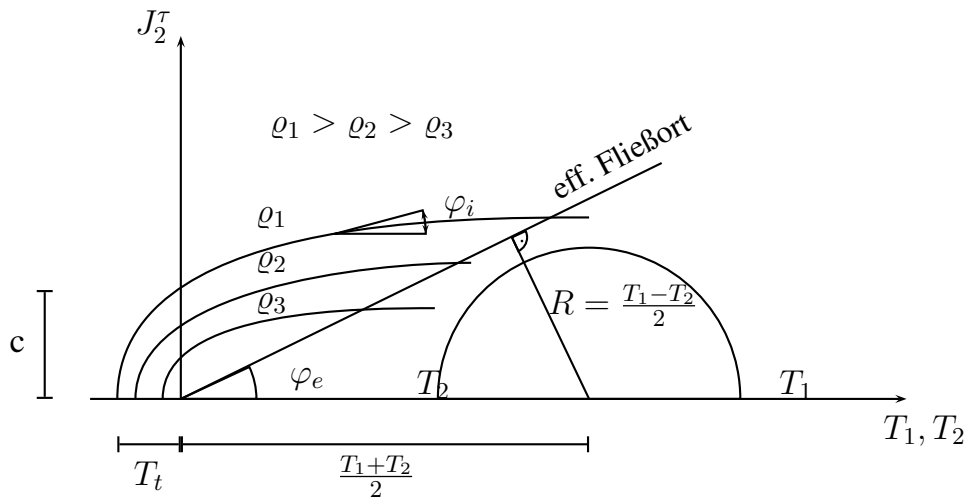


Bild 3.4: Fließorte und effektiver Fließort nach Jenike [66]

3.2.3 Fließregel

Neben der Bestimmung des Grenzzustandes ist es erforderlich, das Verformungsverhalten bei Überschreiten der Fließgrenze zu beschreiben. Die Fließregel gibt einen Zusammenhang zwischen Spannungen und inelastischen Verzerrungen an. Man unterscheidet zwischen assoziierten und nichtassoziierten Fließregeln, welche sich hinsichtlich der Richtung der viskoplastischen Verzerrungen abgrenzen. Aus der Forderung nach stabilem Materialverhalten nach Drucker resultiert die assoziierte Fließregel, wobei die viskoplastischen Verzerrungen senkrecht zur Fließflächentangente verlaufen.

Die für Metalle geeignete assoziierte Fließregel führt zu inelastischen Verzerrungen,

welche unter Verwendung des Fließkriteriums nach von Mises (3.4) proportional zu

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial J_2^\tau} \frac{\partial J_2^\tau}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2^\tau}} \boldsymbol{\tau} \quad (3.8)$$

mit dem Spannungsdeviator $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} - p \mathbf{1}$ sind.

Die Verwendung einer assoziierten Fließregel für reibungsbehaftete Materialien, welche eine druckabhängige Fließfläche aufweisen, führt zu einer in Versuchen nicht bestätigten Volumenänderung. Deshalb wird eine Fließregel in Abhängigkeit von einem neu zu definierenden plastischen Potential g formuliert. Das Potential g ist der Fließfläche f ähnlich, unterscheidet sich von dieser jedoch durch die Verwendung des Dilatanzwinkels ψ anstelle des inneren Reibungswinkels φ in (3.7). Somit folgt aus (3.6) mit einer nichtassozierten Fließregel

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{T}} = \alpha(\psi) \mathbf{1} + \frac{1}{2\sqrt{J_2^\tau}} \left(\mathbf{T} - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{T}) \mathbf{1} \right). \quad (3.9)$$

Abbildung Bild 3.5 zeigt die Fließkriterien mit zugehöriger Richtung der plastischen Verzerrungen für metallische und reibungsbehaftete Materialien.

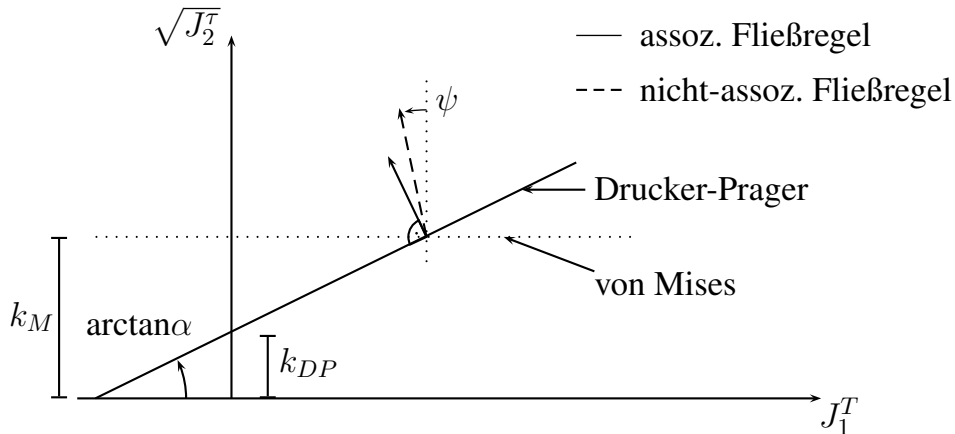


Bild 3.5: Fließbedingungen und viskoplastische Verzerrung

Sowohl die Fließfunktion f als auch das plastische Potential g folgen aus den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Größen. Die Verwendung einer nichtassozierten Fließregel mit dem Dilatanzwinkel $\psi = 0$ dient der Modellierung volumenkonstanten Fließens. Die Fließregel (3.9) geht unter dieser Bedingung in (3.8) über. Der Vorteil einer Fließregel, welche unabhängig vom hydrostatischen Druck ist, liegt für diese Arbeit in der Möglichkeit, hydrostatische und deviatorische Anteile des Mehrphasenmodells getrennt zu betrachten. Zusammen mit der Richtung der viskoplastischen Verzerrungs-

rate ist eine Aussage über die Größe der Fließgeschwindigkeit erforderlich. Perzyna verwendet den Ausdruck

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \bar{\gamma} \langle \Phi(\mathbf{f}) \rangle \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{T}}. \quad (3.10)$$

Das Fließvermögen $\bar{\gamma}$ ist ein Parameter, welcher aus der Viskosität des plastischen Fließens resultiert. Weiterhin ist \mathbf{g} das plastische Potential nach (3.9), $\Phi(\mathbf{f})$ eine Fließfunktion und $\langle \rangle$ die McCauley-Klammern, welche als

$$\langle \Phi(\mathbf{f}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } \Phi(\mathbf{f}) \leq 0 \\ \Phi(\mathbf{f}) & \text{für } \Phi(\mathbf{f}) > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

definiert sind. Zienkiewicz et al. [103] definieren für ein Material nach von Mises

$$\Phi(\mathbf{f}) = \left(\frac{F - F_0}{F_0} \right)^N \quad (3.12)$$

mit dem Modellparameter N , $F = \sqrt{J_2^T}$ und der Fließgrenze $F_0 = k$.

3.2.4 Zeitabhängiges Materialverhalten

Das Beispiel in Bild 3.6 zeigt die Spannungsumverteilung eines viskoplastischen Materials in einer allseitig eingespannten Scheibe für zwei Beanspruchungszustände. Zu Beginn befindet sich das Material in einem einachsigen Druckspannungszustand mit $T_{xx} = 8,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Daraus folgen als Anfangsbedingungen für die gewählten Knotenvariablen

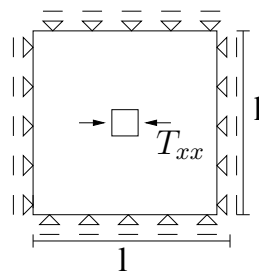
	$T_{xx} = 8,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$	$l=h = 1,0 \text{ m}$
	$E = 8,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$	$\bar{\gamma}^1 = 0,05$
	$T_f^1 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$	$\bar{\gamma}^2 = 0,5$
	$T_f^2 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$	$N = 1,0$

Bild 3.6: Geometrie und Modellparameter

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{1}{3} \cdot T_{xx}, & T_{xx}^{0D} &= -\frac{2}{3} \cdot T_{xx}, \\ \tau^0 &= 0, & T_{yy}^{0D} &= +\frac{1}{3} \cdot T_{xx}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wenn die Anfangsspannung außerhalb der Fließfläche $f = \sqrt{J_2^D} - k_m$ liegt, fließt das Material. Aufgrund des volumenkonstanten Fließens bleibt der Druck p über die gesamte Zeit konstant, während sich die Deviatorspannungen ändern. Das linke Diagramm in

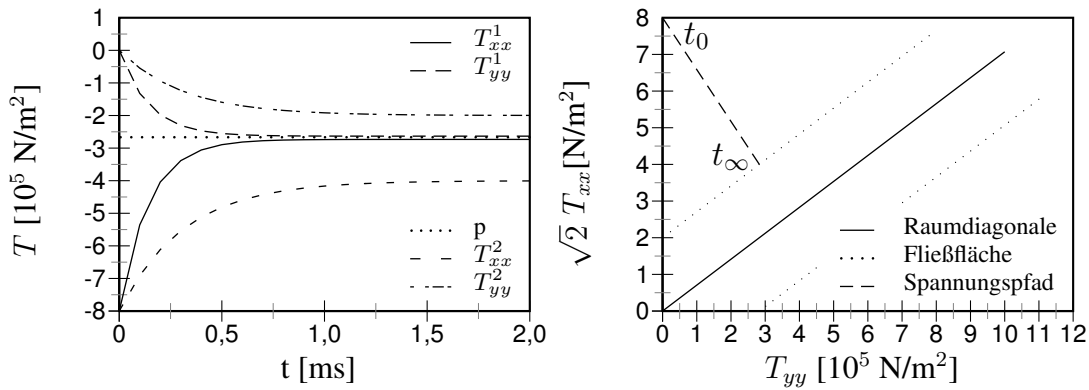


Bild 3.7: Zeitliche Änderung der Spannungskomponenten

Bild 3.7 zeigt die zeitliche Änderung der Gesamtspannungen für die Materialien 1 und 2 aus Bild 3.6. Die maximale Hauptspannung T_{xx} nimmt ab und konvergiert für Material 2 gegen den Wert $4,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, während die Hauptspannungen in die vertikale sowie die Tiefenrichtung der Scheibe auf den Wert $2,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ steigen. Bei Erreichen der konstanten Spannungsverteilung ist somit das Fließkriterium nach von Mises exakt erfüllt, da aus der Betrachtung eines einaxialen Spannungszustandes aus der Fließspannung T_f

$$k_m = T_f/3 \quad (3.14)$$

folgt. Das rechte Diagramm in Bild 3.7 stellt den Spannungsverlauf im Hauptspannungsdiagramm dar. Die eingezeichnete Fließfläche nach von Mises verläuft parallel zur Raumdiagonalen, weil sie lediglich vom Deviator abhängt. Daher verläuft auch der Spannungspfad innerhalb der Deviatorebene, welche orthogonal auf der Raumdiagonalen steht, vom Zeitpunkt t_0 bis zum Erreichen der Fließfläche bis zum Zeitpunkt t_∞ .

4 Materialmodell mit gewichtetem Phasenübergang

Die Beschreibung granularer Materialien als nicht-newtonsche Flüssigkeit oder Festkörper beschränkt die Modellierung auf Vorgänge, welche von einem der beiden Materialverhalten dominiert werden. Viele Phänomene können jedoch nur unter Berücksichtigung beider Verhaltensweisen erklärt werden. So treten in vielen industriellen Anwendungen wie dem Entleeren von Silos oder während Mischungsvorgängen zeit- und ortsabhängig beide Phasenzustände auf. In der Geophysik ist hingegen der Phasenübergang von einem Festkörper zu einem schnellfließenden Material insbesondere für die Beschreibung von Lawinen und Hangrutschungen von Bedeutung.

Daher erfordert die Untersuchung solcher Phänomene die gekoppelte Modellierung beider Phasen. In dem vorgestellten Materialmodell wird die Gesamtspannung als die gewichtete Summe der Spannungen eines nicht-newtonsches Fluids und eines viskoplastischen Festkörpers gebildet.

4.1 Ergebnisse experimenteller Untersuchungen

Aufgrund der Komplexität vieler Bewegungsvorgänge mit Phasenübergang in granularen Materialien existieren nur wenige geeignete Versuchsanordnungen zur Untersuchung des Materialverhaltens. So liefern Experimente zur Messung der Bewegung granularer Materialien auf einer geneigten Ebene grundlegende Aussagen über das dynamische Verhalten und über die Koexistenz fester und flüssiger Phasen. Unter geeigneten Versuchsbedingungen stellt sich eine stationäre Hangrutschung ein, welche durch eine konstante Höhe und ein über die Höhe gleichbleibendes Geschwindigkeitsprofil gekennzeichnet ist.

Pouliquen [76] zeigt, daß die Höhe einer gleichförmigen Hangrutschung, welche in Bild 4.1 schematisch dargestellt ist, mit steigendem Hangneigungswinkel abnimmt und proportional zur mittleren Geschwindigkeit ist. Weiterhin ist ein schichtenweiser Aufbau innerhalb der Hangrutschung zu beobachten. In der untersten, bodennahen Schicht treten hohe Geschwindigkeitsfluktuationen auf und die Geschwindigkeit steigt über die Höhe von wenigen Korndurchmessern stark an. Die mittlere Schicht ist von einer nahezu konstanten Dichte und Geschwindigkeit sowie großen Reibungskräften zwischen den Partikeln gekennzeichnet, während innerhalb der dünnen, oberflächennahen

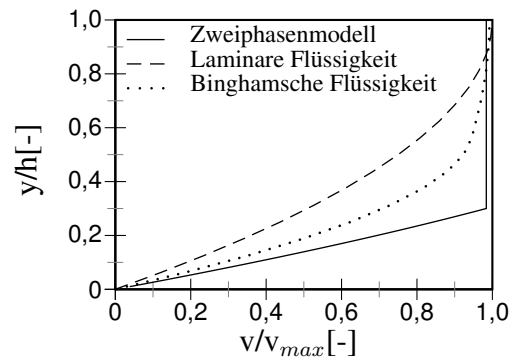
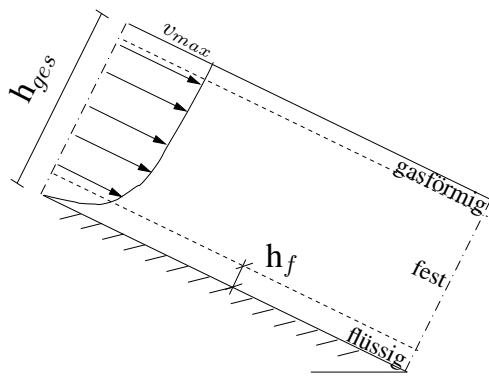


Bild 4.1: Fließprofil mit variablem Reibungswinkel

Schicht die Dichte abrupt abnimmt.

Der geschichtete Aufbau entspricht einer Einteilung in eine flüssige, bodennahe, eine nahezu feste, mittlere und eine gasförmige, ausschließlich durch Kollisionen geprägte Oberflächenschicht. Das Geschwindigkeitsprofil in Bild 4.1 verdeutlicht den diskontinuierlichen Übergang von der flüssigen Phase zur starren Mittelschicht. Die beobachtete Änderung des Geschwindigkeitsgradienten übersteigt den einer Bingham'schen Flüssigkeit.

Ähnliche Ergebnisse liefern Untersuchungen zu großskaligen Hangrutschungen und Lawinenereignissen, bei denen sich ebenfalls eine starre Schicht auf einem dünnen, verflüssigten Film bewegt, welcher aufgrund von Erosion entsteht [84].

Neben der räumlichen Abgrenzung der flüssigen und festen Phase innerhalb eines schnellfließenden Granulars stellt der Beginn der Hangrutschung ebenfalls einen Phasenübergang von fest nach flüssig dar. In industriellen Mischungsvorgängen mit rotierenden Trommeln wiederholt sich dieser Vorgang bei Überschreitung der maximalen Schüttgutneigung [52]. Weiterhin ist die Ausbildung von Scherbändern mit großen Verzerrungsraten und Abgrenzung zu benachbarten feststoffdominierten Bereichen als Phasenübergang zu betrachten.

4.2 Experimentell begründete Anforderungen an die Modellierung

Die experimentellen Untersuchungen zeigen die Koexistenz einer flüssigen und einer festen Phase innerhalb granularer Materialien. Daher ist ein Materialmodell erforderlich, welches beide Phasen sowie den Phasenübergang beschreibt.

Das Modell der flüssigen Phase muß das ratenabhängige Verhalten, den Transport der kinetischen Energie und den Einfluß der Kollisionen zwischen den Partikeln erfassen. Das Feststoffmodell sollte zusätzlich die Abbildung statischer Kontakte und Reibungs-

einflüsse ermöglichen.

Die Modellierung beider Verhaltensweisen mit Hilfe eines einzelnen Parametersatzes ist aufgrund der unterschiedlichen Mechanismen der Spannungsübertragung zwischen den Partikeln kaum möglich. Daher ist eine Parameteranpassung anhand von Versuchsergebnissen getrennt für beide Bewegungszustände erforderlich. Modelle, welche die Gesamtspannung linear aus den Spannungen infolge Reibung und Kollisionen zusammensetzen, sind stets von beiden Phasen geprägt.

Die Einführung einer bewegungsabhängigen Wichtung der Spannungsanteile erlaubt hingegen die Beschreibung des Materialverhaltens auch wenn es ausschließlich von einer Phase dominiert ist. Weiterhin ermöglicht die Formulierung mit Hilfe einer Wichtung die unabhängige Anpassung der Modellparameter an experimentelle Ergebnisse für feste oder flüssige granulare Materialien sowie die Steuerung des Phasenübergangs. Zur Beschreibung des beginnenden Fließens ist eine Wichtung in Abhängigkeit des Verhältnisses der aktuellen Spannung zur Fließgrenze unter Berücksichtigung der Scherrate geeignet, da bis zur Fließgrenze ausschließlich elastische Verzerrungsanteile auftreten und erst bei einer weiteren Belastung das ratenabhängige Fließen beginnt. Die im Folgenden dargestellten bestehenden Modelle erfüllen einige der Anforderungen hinsichtlich der Beschreibung beider Phasen vernachlässigen jedoch den Übergang. Daraus folgt das in dieser Arbeit vorgestellte Modell mit gewichtetem Phasenübergang.

4.3 Stand des Wissens

Aufgrund der zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten existieren bereits einige Modelle [76, 85, 99], welche das Verhalten granularer Materialien mit Berücksichtigung des Phasenübergangs beschreiben. Man unterteilt rein additive Modelle mit linearer Superposition der Spannungskomponenten, Materialmodelle, in welchen die Fließregel für elastoplastisches Materialverhalten in eine Flüssigkeitsformulierung umgewandelt wird, und Modelle mit explizit definiertem Phasenübergang. Die Kombination der Vorteile der verschiedenen Modellansätze führt zur Formulierung des in dieser Arbeit entwickelten Zweiphasenmodells.

4.3.1 Additive Modelle für granulare Materialien

Erste Modelle von Savage [85] zur Beschreibung des Materialverhaltens granularer Materialien im Übergangsbereich zwischen fester und flüssiger Phase bilden die Gesamtspannung \mathbf{T} aus der linearen Superposition einer ratenunabhängigen, reibungsbehafteten Feststoffspannung \mathbf{T}^S und einer viskosen, kollisionsdominierten Flüssigkeits-

spannung \mathbf{T}^F

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^F + \mathbf{T}^S. \quad (4.1)$$

Louge [63] verwendet eine ähnliche Aufteilung der Spannung in Anteile infolge stoßweiser und andauernder Kontakte. Die aus Kollisionen hervorgerufenen Spannungen sind hierbei ratenabhängig und die Komponenten der Scherspannungen des Feststoffanteils stehen in einem konstanten Verhältnis zur Feststoffnormalspannung. Die Untersuchung einer stationären Hangrutschung erlaubt die Bestimmung der Gesamtspannung aus geometrischen Betrachtungen. Daher folgt die Wichtung zwischen flüssigen und festen Spannungskomponenten ausschließlich aus der Betrachtung der viskosen Anteile. Diese Herangehensweise kann aufgrund des fehlenden Wissens über die Gesamtspannung jedoch nicht auf beliebige Strömungen erweitert werden.

Srivastava [89] teilt die Gesamtspannung in kinetische und reibungsdominierte Spannungen auf. Die Spannung infolge Reibung gibt dabei stets den kritischen Zustand nach Mohr-Coulomb wieder und erlaubt somit keine Beschreibung elastischen Verhaltens.

Allen Modellen mit linearer Superposition der Spannungsterme ist gemein, daß die Ermittlung der Spannungskomponenten unabhängig voneinander erfolgt, so daß das Materialverhalten stets flüssige und feste Eigenschaften berücksichtigt. Diese Annahme kann experimentell nicht bestätigt werden, da keine explizite Fließgrenze erfaßt wird [89]. Weiterhin erlaubt die ungewichtete Superposition der Spannungskomponenten keine Aussage über den Phasenübergang, entstehende Scherfugen und Phasentrennungen sowie den Beginn des plastischen Fließen.

4.3.2 Flüssigkeitsmodelle aus Fließregeln für plastisches Materialverhalten

Neben der additiven Formulierung ist es möglich, die Gesamtspannung \mathbf{T} einer Flüssigkeitsspannung \mathbf{T}^F gleichzusetzen, welche von der durch reibungsbehaftete Kontakte hervorgerufenen Spannung und vom Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{D} abhängt

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^F = \mathbf{f}(\mathbf{T}^S, \mathbf{D}, \varrho). \quad (4.2)$$

Elaskar [24] ermittelt die Viskosität der nicht-newtonschen Flüssigkeit aus (2.6) und der assoziierten Fließregel nach von Mises (3.4) zu

$$\beta_1 = \left[\left(\frac{\sqrt{J_2^T}}{\gamma} \right)^n + k - \alpha' \frac{J_1^T}{3} \right] \frac{1}{3\sqrt{J_2^T}} \quad (4.3)$$

mit dem dichteabhängigen Fließparameter γ . Ebenso verwendet Savage [83] für langsame, dichte Strömungen die mittels Fließregel ermittelten Verzerrungsraten zur Bestimmung der Geschwindigkeitsfluktuationen. Die Energiebilanz der gemittelten Fluktuationsenergie liefert eine unendliche Viskosität für Partikelanordnungen, deren Feststoffanteil π einen materialabhängigen Maximalwert erreicht.

Weiterhin versagt die Formulierung für verschwindende Geschwindigkeitsgradienten, da eine konsistente Umformung der Fließregel aus einem Modell für plastisches Materialverhalten in eine ratenabhängige Formulierung nur für starre Festkörper möglich ist [13]. Die Modellierung des plastischen Fließens ermöglicht ausschließlich die Beschreibung des granularen Materials nach dem Fließen und berücksichtigt das Feststoffverhalten lediglich zur Bestimmung der Grenzscherspannung und der Fließeigenschaften.

4.3.3 Geometrisch getrennte Phasen

Fusi [26] unterteilt das granulare Material in Gebiete, welchen viskoelastische Materialeigenschaften zugeordnet sind, und Gebiete viskosen Materials. Ein Übergangsparameter a

$$a = \left(\frac{\eta}{E} \right)^2 J_2^\tau \quad (4.4)$$

mit der Viskosität η und dem E-Modul E bestimmt die Zuordnung zu den geometrisch getrennten Phasen. Für

$$a > a_0 = \frac{T_f^2}{2E^2} \quad (4.5)$$

verhält sich das Material viskos und die Lage der Grenzfläche folgt aus der Betrachtung des Gleichgewichts der angrenzenden Phasen. Die rein mathematisch begründete Modellierung beschreibt einen diskontinuierlichen Übergang zwischen den Phasen, welcher nur für Einzelfälle eine Lösung der Modellgleichungen ermöglicht. Für komplexe Vorgänge mit fortschreitendem Phasenübergang und fehlender, geometrisch vorgegebener Grenzfläche existiert bisher keine Lösung.

4.3.4 Gewichtete Spannungen und Kontaktmodell

Einen anderen Ansatz verfolgt Volfson [99], der den Phasenübergang zwischen festem und flüssigem Materialverhalten aus Vergleichen mit Ergebnissen aus Simulationen mit der Diskrete-Elemente-Methode bestimmt. Die Simulation der Bewegung der einzelnen Partikel liefert Aussagen über den mittleren Druck, die Anzahl der Kontakte zwischen den Partikeln und die Kontakteigenschaften. So definiert Volfson einen Kontakt als statisch, wenn die zwischen den Partikeln auftretende tangentielle Kraft die maximal mittels Reibung aufnehmbare Kraft nicht übersteigt. Weiterhin ist die Kollisionsdauer statischer Kontakte deutlich länger als eine durchschnittliche Kollision. Aus dem Anteil der statischen Kontakte Z_s an der Gesamtanzahl Z_{ges} der Kontakte folgt der Ordnungsparameter $r = Z_s/Z_{ges}$. In Abhängigkeit des Ordnungsparameters sind Proportionalitätsfaktoren $q_i(r)$ definiert, welche das Verhältnis zwischen der Gesamtspannung

$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}$ und den Spannungskomponenten infolge des fluidähnlichen Verhaltens zu

$$\boldsymbol{\tau}^F = q_\tau(r) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{T}_{xx}^F = q_x(r) \cdot \mathbf{T}_{xx}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{T}_{yy}^F = q_y(r) \cdot \mathbf{T}_{yy} \quad (4.8)$$

angeben. Für den festen Zustand mit $r = 1$ verschwindet der Proportionalitätskoeffizient, während er für den flüssigen Zustand, für $r = 0$, zu 1,0 wird. Die Fluidspannungen folgen dem Materialmodell einer newtonschen Flüssigkeit $\mathbf{T}^F = -p\mathbf{1} + \bar{\eta}\mathbf{D}$, so daß auftretende Abweichungen vom hydrostatischen Normalspannungszustand ausschließlich über die Wahl der Koeffizienten modelliert werden.

Die Anpassung der Koeffizienten aus dem Ordnungsparameter erfolgt anhand einer reinen Scherströmung, welche zunächst mit einer Simulation mittels Diskrete-Elemente-Methode modelliert wird, siehe Bild 4.2. Die gewonnenen Aussagen über die Anzahl der statischen Kontakte in Relation zur aufgebrachten Scherkraft F und dem konstanten Druck P liefern die benötigten Spannungskomponenten für die kontinuumsmechanische Analyse zur Angleichung der Koeffizienten. Es folgen

$$q_\tau(r) = (1 - r)^{2,5}, \quad q_x(r) = (1 - r)^{1,9} \quad \text{und} \quad q_y(r) = (1 - r^{1,2})^{1,9}, \quad (4.9)$$

welche in Bild 4.2 abgebildet sind. Die Zuordnung der Koeffizienten in Abhängig-

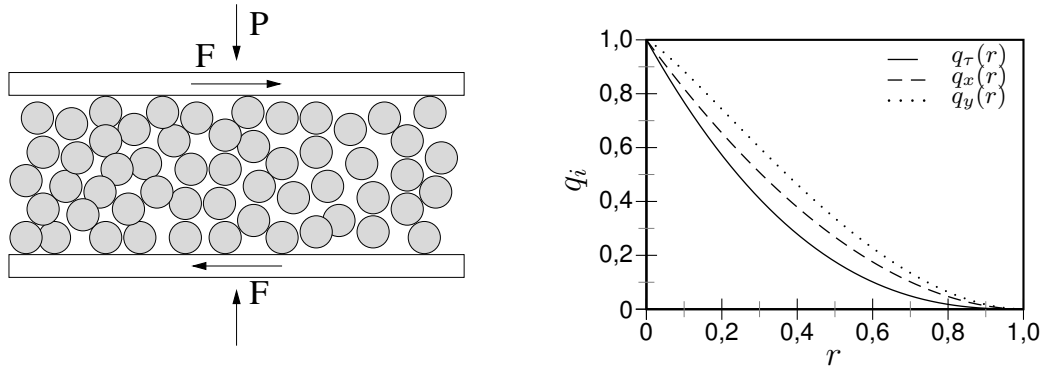


Bild 4.2: Diskrete-Elemente-Methode-Aufbau und Anpassung der Koeffizienten

keit von der betrachteten Strömung und der Richtung der Spannungskomponenten verhindert eine unmittelbare Übertragung auf weitere Anwendungsbeispiele. Andererseits zeigt die Untersuchung, daß der Strömungszustand sehr empfindlich auf Änderungen des Spannungszustandes nahe der Fließgrenze reagiert. Bereits bei einer geringen Überschreitung der Fließgrenze fällt der Ordnungsparameter aufgrund der großen Geschwindigkeitsgradienten zwischen den Partikel schnell ab. Der Feststoffanteil bleibt infolge der örtlich begrenzten Geschwindigkeitsfluktuationen konstant und ist daher als Indikator des Phasenübergangs nicht geeignet.

Für das in dieser Arbeit verwendete Modell erscheint daher eine Abhängigkeit des Phasenüberganges von Geschwindigkeitsgradient und Scherspannung geeignet. Die Untersuchung Volfsons begründet die Wahl einer Wichtung mit einer Übergangsfunktion und zeigt für granulare Materialien die Existenz unabhängigen flüssigkeits- bzw. feststoffähnlichen Verhaltens.

4.4 Materialmodell mit gewichtetem Phasenübergang zwischen fester und flüssiger Phase

Die experimentellen Beobachtungen und die zugehörigen Modellvorstellungen zeigen, daß granulare Materialien flüssige und feste Eigenschaften besitzen. Additive Formulierungen bieten den Vorteil der unabhängigen Parameteranpassung für feste und flüssige Bewegungszustände, vernachlässigen jedoch die Modellierung des Phasenüberganges. Das vorgestellte Modell nach Volfson erlaubt mit Wahl einer Wichtungsfunktion die Darstellung des Überganges, ist jedoch auf Einzelfälle beschränkt, welche die Anpassung an mit der Diskrete-Elemente-Methode berechnete Ergebnisse ermöglichen. Die Entwicklung des in dieser Arbeit vorgestellten Modells erfolgt mit Berücksichtigung einer Fließgrenze in einer additiver Formulierungen.

4.4.1 Aufbau des Stoffmodells

Die Modellierung eines gewichteten Phasenüberganges zwischen fester und flüssiger Phase erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe einer Wichtungsfunktion ξ . Die Wichtung spiegelt das aktuelle Materialverhalten wider und folgt aus den Zustandsgrößen Spannung, Dichte und Geschwindigkeitsgradient. Somit setzt sich die Gesamtspannung des Materials aus dem Druck p und den mit ξ gewichteten Scherspannungen für die flüssige Phase τ^F und den deviatorischen Anteilen der festen Phase τ^S

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{1} + (1 - \xi) \tau^S + \xi \tau^F \quad (4.10)$$

zusammen. Für rein viskoplastisches Materialverhalten, mit der Wichtungsfunktion $\xi = 0$, entfallen die viskosen Scherspannungen und der Gesamtdruck p entspricht dem hydrostatischen Anteil der Feststoffspannung $p = -1/3 \text{tr} \mathbf{T}$. Für rein viskoses, flüssigkeitsähnliches Verhalten, bei $\xi = 1$, ist der Druck eine unabhängige Beschreibungsgröße und die Deviatorspannung ist ratenabhängig. Bild 4.3 zeigt schematisch die Spannungs-Verzerrungs bzw. Spannungs-Verzerrungsraten-Diagramme für rein viskoplastisches Feststoffverhalten links und eine ideale Bingham'sche Flüssigkeit rechts. Der bei Überschreiten der Feststoffspannung über die Fließgrenze T_f einsetzende, graumarkierte Phasenübergang ermöglicht eine Kombination aus elastischem und viskosem Verhalten.

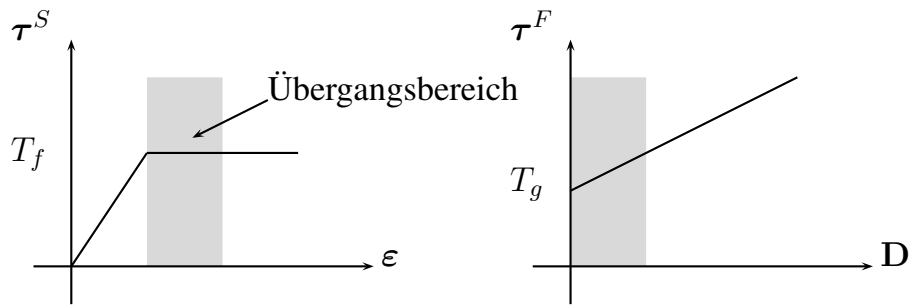


Bild 4.3: Schematische Darstellung der Spannungen und Übergangsbereiche

Statt der dargestellten konstitutiven Zusammenhänge ist die Wahl weiterer, spannungs- und dichteabhängiger Materialmodelle möglich, die eine noch bessere Abbildung der Phänomenologie der festen und flüssigen Phase erlauben. Hier finden das Fluidmodell nach Chen (2.2) und (2.14) und ein viskoplastisches Feststoffmodell (3.3) und (3.9) Anwendung. Neben der Fließgrenze T_f , welche durch das Feststoffverhalten bestimmt ist, existiert eine Grenzscherspannung T_g , die das flüssigkeitsähnliche Verhalten beeinflusst.

Bild 4.4 zeigt das zusammengesetzte Spannungs-Verzerrungsraten-Diagramm für den Fließzustand. Dabei erreicht die deviatorische Feststoffspannung J_2^T die statische Fließgrenze T_f . Danach bestimmt der Geschwindigkeitsgradient das Materialverhalten. Die unterschiedlichen Größen beider Scherspannungen entsprechen Haft- bzw. Gleitreibung und erlauben eine Spannungsverminderung nach Erreichen der statischen Fließgrenze. Maßgebend für das Materialmodell sind somit die beiden Grenzscherspannungen und die Formulierung des Übergangsbereichs.

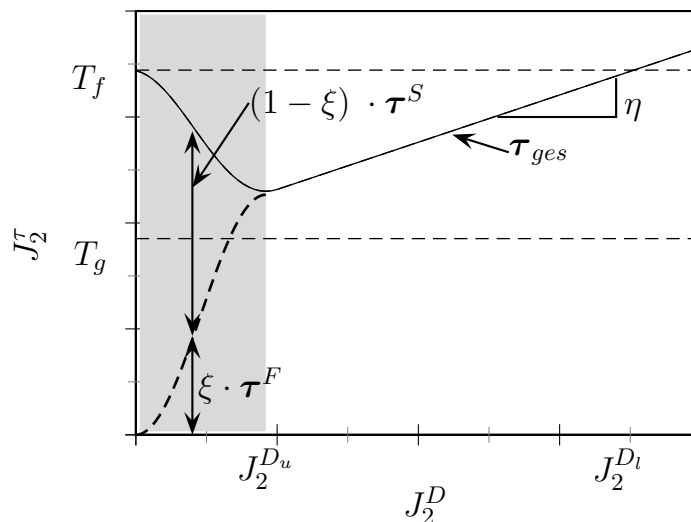


Bild 4.4: Gesamtspannung

Die Verzerrungsrate D_u gibt die Größe des Übergangsbereichs an, während D_l eine Hilfsgröße ist, welche aus $D_l = (T_f - T_g)/\eta$ folgt. Die beiden Werte finden Verwen-

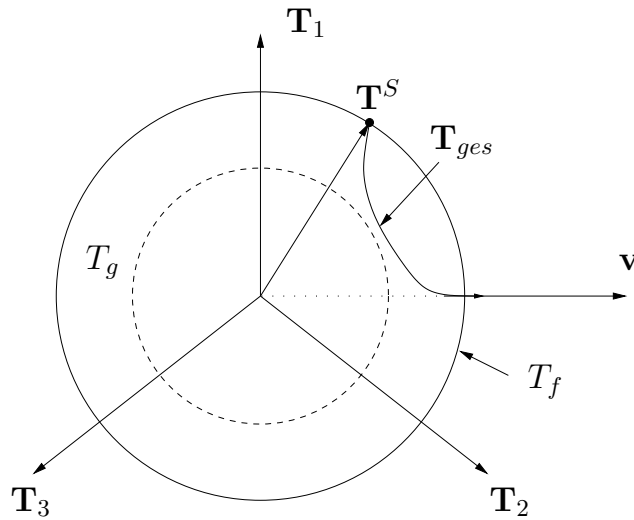


Bild 4.5: Übergangsbereich im Invariantendiagramm

dung in der folgenden Beschreibung der Übergangsfunktion innerhalb des graumarkierten Bereiches. Zur Beschreibung komplexer Bewegungen in einem dreidimensionalen Gebiet ist eine ortsunabhängige Formulierung erforderlich. Daher erfolgt die Bestimmung aller Bewegungs- und Spannungsgrößen in Abhängigkeit der Invarianten J_i^D und J_i^T des Verzerrungsgradienten \mathbf{D} und der Spannung \mathbf{T} . Die Fließgrenze T_f und die Grenzscherspannung T_g , welche in der Invariantenformulierung nach Drucker-Prager verwendet werden, sind in der Deviatorebene in Bild 4.5 dargestellt. Innerhalb des elastischen Bereichs bis zum Erreichen der Fließgrenze T_f ist das Material fest. Der Spannungszustand \mathbf{T}^S stellt einen möglichen Grenzzustand dar, welcher den Beginn des Fließens markiert. Bei einem weiteren Fließvorgang in Richtung der Geschwindigkeit \mathbf{v} folgt die Gesamtspannung \mathbf{T}_{ges} dem dargestellten gekrümmten Verlauf.

4.4.2 Wahl der Wichtungsfunktion

Nach der Bestimmung der Modellparameter jeder einzelnen Phase ist eine Formulierung des Übergangsbereichs erforderlich. Bis zum Erreichen der statischen Fließgrenze T_f ist das Materialverhalten mit einem rein elastischen Feststoffmodell abzubilden, so daß gilt

$$\xi = 0 \quad \text{für} \quad \|\boldsymbol{\tau}^S\| < \|T_f\|. \quad (4.11)$$

Für den Feststoff wird viskoplastisches Materialverhalten angenommen. Nach Beginn des Fließvorganges ist das Materialverhalten abhängig von den Scherverzerrungsgeschwindigkeiten. Zunächst dominieren weiterhin Reibungseinflüsse, welche mit dem Feststoffmodell beschrieben werden. Bei steigender Scherrate lösen sich die Kontakte zwischen den Partikeln des Granulars und das Material zeigt viskoses Verhalten.

Aufgrund des direkten Zusammenhangs zwischen der Scherrate \mathbf{D} und der Gesamtspannung \mathbf{T} nach Bild 4.4 kann die Wichtungsfunktion mit der Scherrate verknüpft werden. Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Scherkraft und Wichtungsfunktion existiert wegen des Spannungsabfalls nach Erreichen der Fließgrenze nicht.

Der in Bild 4.6 abgebildete sinusförmige Verlauf der Wichtungsfunktion von 0 bis $J_2^{D_u}$

$$\xi = 0,5 + 0,5 \cdot \sin \left(\pi / J_2^{D_u} \cdot (J_2^D - (J_2^{D_u} / 2)) \right) \quad (4.12)$$

ist von der zweiten Invariante der Verzerrungsrate J_2^D abhängig und erfüllt die erforderlichen Randbedingungen

$$\xi = 0 \quad \text{für} \quad J_2^D = 0 \quad (4.13)$$

$$\xi = 1 \quad \text{für} \quad J_2^D > J_2^{D_u}, \quad (4.14)$$

wobei die Länge des Übergangsbereichs $J_2^{D_u}$ im weiteren zu bestimmen ist. Darüber hinaus ermöglichen die horizontalen Tangenten in den Punkten 0 und $J_2^{D_u}$ eine numerisch stabile Behandlung des Stoffmodells.

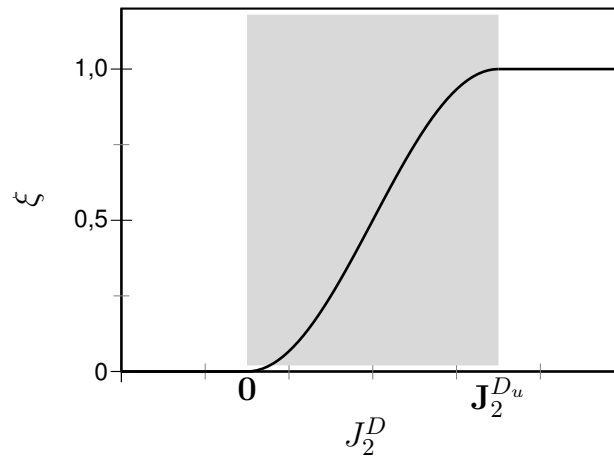


Bild 4.6: Wichtungsfunktion

4.5 Anpassung der Modellparameter an experimentelle Ergebnisse

Nach der mathematischen Formulierung des Materialmodells (4.10) ist eine Identifizierung und Anpassung aller Modellparameter anhand von Versuchsdaten erforderlich. Die additive Formulierung erlaubt die getrennte Zuweisung der Parameter und der gemessenen Werte für beide Phasen sowie den Übergangsbereich. Für das Feststoffmodell in (3.3) sind

der Elastizitätsmodul E ,
 die Querdehnzahl ν und
 der Haftreibungswinkel φ_h

entscheidende Modellgrößen, welche mittels bodenmechanischer Standardversuche bestimmt werden können. Die Wahl der Parameter erfolgt aufgrund der Vielzahl granularer Materialien mit unterschiedlichen Eigenschaften ausschließlich für Sand und kann der Literatur entnommen werden.

Das einfachste Fluidmodell nach Bingham (2.9) beschreibt das Materialverhalten in Abhängigkeit

vom Gleitreibungswinkel φ_g und
 von der Viskosität η .

Für die Modellierung des Übergangs ist weiterhin die

Länge des Übergangsbereiches $J_2^{D_u}$

erforderlich. Zur Bestimmung des gesamten Parametersatzes ist es erforderlich, geeignete experimentelle Daten zu analysieren, welche Aussagen über die einzelnen Komponenten des Materialverhaltens erlauben. Daher müssen die Modellparameter für festes bzw. flüssiges Materialverhalten aus unterschiedlichen Versuchen folgen, so daß ausschließlich das phänomenologische Verhalten im Übergangsbereich gesondert betrachtet wird.

4.5.1 Spannungen in einer stationären Hangströmung

Es existieren nur wenige aussagekräftige Versuchsreihen, welche der Untersuchung des Übergangsbereichs dienen und sowohl feste als auch flüssige Phasen berücksichtigen. Daher erfolgt die Anpassung der Modellparameter ausschließlich an der in Bild 4.1 dargestellten, stationären Hangrutschung unter Verwendung der Untersuchungen von Louge [63] und der Messergebnisse von Pouliquen [76].

Aus den gegebenen Mindesthöhen resultiert eine mittlere Höhe der flüssigen Zone h_f von 3 d mit dem Durchmesser $d=0,5$ mm. Unter der Annahme, daß innerhalb der festen Zone das granulare Material eine konstante Geschwindigkeit aufweist, folgt aus den gemessenen Maximalgeschwindigkeiten v_{max} der Geschwindigkeitsgradient innerhalb der Fluidzone. Zusammen mit der Gesamtspannung, welche mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht stehen muß, entsteht das in Bild 4.7 dargestellte Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeiten-Diagramm für die Mitte der Fluidschicht.

Eine Optimierung führt mit den experimentellen Daten, gekennzeichnet durch +, o und \triangle für drei unterschiedliche Gesamthöhen h_{ges} , auf die gesuchten Modellparameter $\eta = 4000 \text{ kN/m}^2$ und $\varphi_g = 20^\circ$. Aufgrund des nahezu linearen Spannungs-

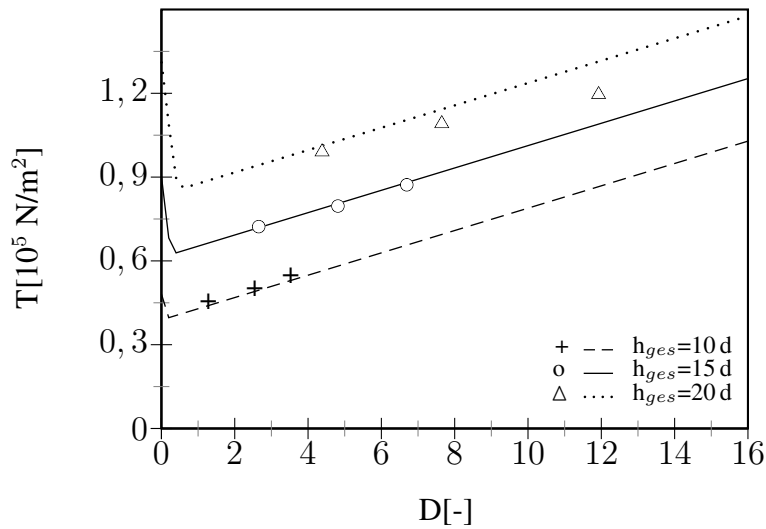


Bild 4.7: Spannungs-Verzerrungsgradienten-Relation für verschiedene Gesamthöhen

Verzerrungsgeschwindigkeiten-Verlaufs ist keine Aussage über die Länge des Phasenüberganges zu treffen. Es folgt eine Abschätzung auf $D_u = D_l/10$, um den Übergangsbereich einerseits gering zu halten und andererseits eine numerisch stabile Phasenumwandlung zu gewährleisten.

4.5.2 Geschwindigkeitsprofile

Im Anschluß an die Bestimmung der Fließparameter des granularen Materials folgt eine Auswertung der Bewegungsgleichung für verschiedene Hangneigungswinkel α und Gesamthöhen h_{ges} . Das linke Diagramm in Bild 4.8 zeigt das höhennormierte Geschwindigkeitsprofil über die Höhe für $h_{ges} = 15 d = 7,5 mm$ und Hangneigungswinkel zwischen 22° und 26° . Bei steigendem Neigungswinkel und somit steigender Scherspannung innerhalb der Strömung nimmt die Maximalgeschwindigkeit zu. Neben dem festen Bereich mit konstanter Geschwindigkeit existiert eine Zone mit flüssig-

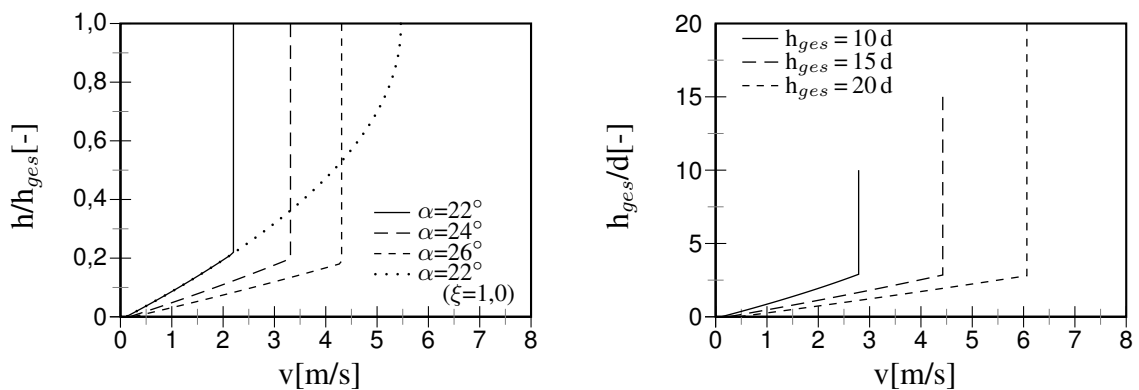


Bild 4.8: Geschwindigkeitsprofile

keitsähnlichem Verhalten, in welcher die Geschwindigkeit quadratisch über die Höhe zunimmt. Die gepunktete Kurve zeigt das Geschwindigkeitsprofil, welches sich ohne eine Phasenänderung bei vollständiger Verflüssigung einstellt. Das rechte Diagramm zeigt den Einfluß der Gesamthöhe auf das Geschwindigkeitsprofil für einen konstanten Neigungswinkel von 22° . Unter Annahme einer unveränderlichen Fluidzone steigt der Geschwindigkeitsgradient und somit die Maximalgeschwindigkeit an. Zusammenfassend resultiert das in Bild 4.9 dargestellte Diagramm, welches die Gesamthöhe h_{ges} der Strömung in Relation zur Maximalgeschwindigkeiten v_{max} darstellt. Die Wichtung mit \sqrt{gd} folgt aus Analogie zur Froude-Zahl, welche ein Maß zur Charakterisierung von Strömungen mit freien Oberflächen ist. Die abgebildeten Versuchswerte korrelieren sehr gut mit den berechneten Kurven, was die Annahme eines Phasenüberganges innerhalb der Strömung und die Verwendung vereinfachender Materialmodelle für beide Phasen bestätigt.

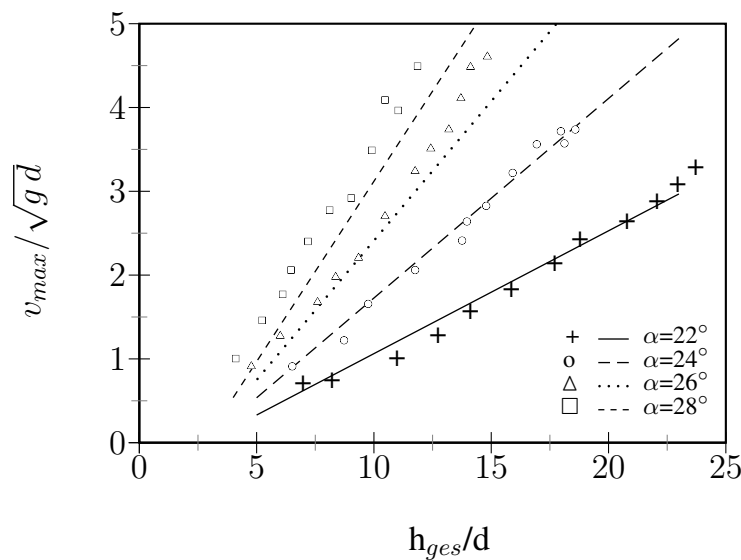


Bild 4.9: Maximale Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Gesamthöhe

5 Lösungsverfahren

Die Beschreibung vieler physikalischer Vorgänge basiert auf nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen wie Bilanz-, Transport- und Materialgleichungen. Schon für einfache technisch relevante Aufgabenstellungen existiert aufgrund der hohen Komplexität der Geometrie und der Einwirkungen keine geschlossene Lösung der Modellgleichungen, welche daher nur numerisch, unter Verwendung geeigneter Näherungsverfahren lösbar sind. Eine endliche Anzahl Freiwerte ersetzt dabei die räumlich und zeitlich kontinuierlich definierten Beschreibungsvariablen. Somit wird nur eine entsprechende Anzahl algebraischer Gleichungen zur Beschreibung der Vorgänge benötigt.

Das folgende Kapitel stellt die Modellgleichungen vor und erläutert die gewählte Betrachtungsweise und das verwendete numerische Lösungsverfahren. Besondere Betrachtung erfährt dabei die in dieser Arbeit entwickelte Beschreibung der Bewegung dehnungsabhängigen Materials in Eulerscher Betrachtungsweise und ihrer numerischen Umsetzung mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode.

5.1 Grundgleichungen

Die phänomenologische Beschreibung der Bewegung eines Körpers \mathcal{B} mit Hilfe der Kontinuumsmechanik erfordert die Kenntnis der im Folgenden erläuterten Kinematik und Kinetik sowie der Bilanz- und Materialgleichungen. Weiterführende Darstellungen sind in der Literatur zu finden, z.B. in [4, 91, 98]. Die Notation folgt im wesentlichen Belytschko [10].

5.1.1 Kinematik

Die kontinuierlich definierten Zustandsgrößen wie Druck, Temperatur und Geschwindigkeit werden den zusammenhängenden Punkten des Körpers zugeordnet. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ ist die Lage des Körpers in der Referenzkonfiguration Ω_0 definiert, welche in Bild 5.1 abgebildet ist. Die Verschiebung \mathbf{u} eines Materialteilchens aus der Position \mathbf{X} der Referenzkonfiguration in die aktuelle Position \mathbf{x} in der Momentankonfiguration Ω_t folgt aus der Differenz der Ortsvektoren

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} . \quad (5.1)$$

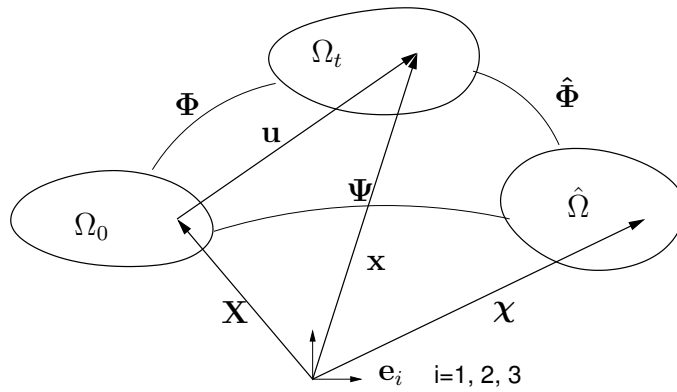


Bild 5.1: Referenz-, Bezugs- und Momentankonfiguration

Die Geschwindigkeiten eines Materialteilchens sind abhängig von der Wahl des Beobachters. Der Beobachter der Lagrangeschen Betrachtungsweise folgt einem bestimmten Materialteilchen ausgehend von Punkt \mathbf{X} in der Referenzkonfiguration Ω_0 entlang seiner Bahnlinie. Die Bewegung ist vollständig beschrieben wenn der Aufenthaltsort dieses Teilchens zu jedem Zeitpunkt bekannt ist. Diese Darstellungsweise findet vorrangig in der Strukturmechanik Anwendung, da sie die Verfolgung eines Materialteilchens einschließlich seiner Geschichte ermöglicht.

Im Gegensatz zur Lagrangeschen ist es in der Eulerschen Darstellung unbedeutend, welches Materialteilchen sich an einem bestimmten Ort befindet. Die Beschreibung der Zustandsänderung erfolgt zum Zeitpunkt t am festen Beobachtungspunkt \mathbf{x} in der Momentankonfiguration Ω_t . Diese Darstellung findet in der Strömungsmechanik Anwendung, wenn ein ortsfestes Kontrollvolumen betrachtet wird.

Aufgrund dieser Eigenschaften erscheint die Eulersche Betrachtungsweise besser geeignet, den Ausfluß von Silos und weitere Anwendungen mit großen Bewegungen granularer Materialien abzubilden.

Zur Beschreibung des Deformationsverhaltens in Eulerscher Betrachtungsweise wird unter Berücksichtigung großer Deformationen der Almansische Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T - (\nabla_x \mathbf{u})^T \cdot \nabla_x \mathbf{u}). \quad (5.2)$$

verwendet. Er beschreibt die Verzerrung eines Materialteilchens bezogen auf die aktuelle Position analog zum Greenschen Verzerrungstensor \mathbf{E} , welcher ein geeignetes Verzerrungsmaß in Lagrangescher Betrachtungsweise darstellt. Für kleine Verzerrungen folgt die Definition des linearisierten Verzerrungstensors ε unabhängig von der gewählten Betrachtungsweise zu

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (5.3)$$

In Lagrangescher Betrachtungsweise wird die Verschiebung jedes Materialteilchens beschrieben. Im Gegensatz dazu ist in der im weiteren betrachteten Eulerschen Betrachtungsweise die Geschwindigkeit, die an jedem Raumpunkt definiert ist, eine wesentliche Feldgröße der Bewegungsbeschreibung. Die Momentangeschwindigkeit \mathbf{v} am Beobachtungspunkt \mathbf{x} zur Zeit t ist definiert als materielle Ableitung der Verschiebung nach der Zeit. Hierbei setzt sich die materielle Zeitableitung der Verschiebung \mathbf{u} aus einem lokalen und einem konvektiven Anteil zusammen

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (5.4)$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} charakterisiert die Verzerrung eines bestimmten Volumenelements und läßt sich in die symmetrische Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} und den antisymmetrischen Drehtensor \mathbf{W} zerlegen

$$\mathbf{L} = \nabla_x \mathbf{v}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (5.5)$$

Die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} bezieht sich auf die Momentankonfiguration und ist objektiv. Sie entspricht der objektiven Oldroyd-Ableitung ($\overset{\nabla}{\cdot}$) des Almansischen Verzerrungstensors \mathbf{A}

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{D}, \quad (5.6)$$

Somit ist die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} als Verzerrungsmaß in Eulerscher Betrachtungsweise geeignet.

5.1.2 Bilanzgleichungen

Neben der bisher dargestellten Kinematik, der Bewegungsbeschreibung eines Körpers, ist es in der Kontinuumsmechanik notwendig, weitere Feldgleichungen aufzustellen. Dazu werden die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie verwendet, welche Spezialfälle einer allgemeinen Erhaltungsgleichung sind, die in Integralform als

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \mathbf{U} \, d\Omega - \mathbf{F} = 0 \quad (5.7)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \Phi - \mathbf{Z} - \mathbf{P}) \, d\Omega \quad (5.8)$$

im Gebiet Ω definiert ist. Die zeitliche Änderung einer Feldgröße \mathbf{U} folgt aus dem Fluß Φ über den Rand, der Zufuhr \mathbf{Z} im Volumen und dem Produktionsterm \mathbf{P} innerhalb des Volumens, welcher für Erhaltungsgrößen entfällt.

Massenerhaltung

Die Masse ist eine Erhaltungsgröße und kann sich im Gebiet Ω nur ändern, wenn der Massenstrom über die Gebietsränder von Null verschieden ist. Die allgemeine Bilanzgleichung (5.7) mit $\mathbf{U} = \varrho$ und $\mathbf{P} = \mathbf{Z} = \Phi = 0$ führt in der differentiellen, lokaler Form zur Kontinuitätsgleichung in Eulerscher Betrachtungsweise

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5.9)$$

welche sich für inkompressible Fluide zu

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.10)$$

vereinfacht. In Lagrangescher Betrachtungsweise stellt die Massenerhaltung keine Bestimmungsgleichung der Bewegung dar, da die Dichteänderung unmittelbar aus der Verschiebung folgt. Die Darstellung der Massenbilanz in Abhängigkeit vom Feststoffanteil π ermöglicht eine dimensionslose Beschreibung. Der Feststoffanteil gibt die Konzentration des Feststoffes am Gesamtvolumen wieder. Daher folgt die aktuelle Dichte ϱ des betrachteten Volumens aus der Dichte des Feststoffes ϱ_s unter Vernachlässigung der Dichte der Porenluft

$$\varrho = \varrho_s \cdot \pi \quad (5.11)$$

und die Massenerhaltung lautet

$$\frac{D\pi}{Dt} + \pi \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.12)$$

Impuls- und Drehimpulsbilanz

Der Impuls eines massebehafteten Körpers ändert sich durch Krafteinwirkung auf den Körper. Zu den angreifenden Kräfte gehören Volumenkräfte $\varrho \mathbf{b}$ und Flächenkräfte, welche durch den Cauchyschen Spannungstensor \mathbf{T} beschrieben werden. Mit $\mathbf{U} = \varrho \mathbf{v}$, $\Phi = -\mathbf{T}$ und $\mathbf{Z} = \varrho \mathbf{b}$ und (5.7) folgt die Impulsbilanz in lokaler Form in Eulerscher Betrachtungsweise unter Ausnutzung der Massenbilanz zu

$$\varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \varrho \mathbf{b} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \varrho \mathbf{b}. \quad (5.13)$$

Die Aufstellung der Drehimpulsbilanz an einem Materialteilchen führt zu einem symmetrischen Cauchyschen Spannungstensors

$$T_{ij} = T_{ji}. \quad (5.14)$$

5.1.3 Materialgleichung

Die Bilanzgleichungen gelten unabhängig vom betrachteten Material. Das Materialmodell folgt der in Kapitel 4 vorgestellten Zweiphasenformulierung. Die Addition der Spannungsanteile aus Flüssigkeits- und Feststoffbeschreibung erfordert einen einheitlichen Bezugspunkt und somit die Verwendung der Eulerschen Betrachtungsweise für beide Phasen. Daher erfolgt die Formulierung der Materialgleichung des Feststoffmodells ebenfalls in Bezug auf ortsfest definierte Größen.

Aufgrund der Beschreibung in Eulerscher Betrachtungsweise besteht die zeitliche Ableitung aus lokalem und konvektivem Anteil und alle Zustandsgrößen sind raumbezogen. Für viskoplastisches Materialverhalten in Eulerscher Betrachtungsweise folgt

$$\dot{\mathbf{T}}^S = \frac{D\mathbf{T}^S}{Dt} = \underline{\mathbf{C}} : \mathbf{D}_{el} = \underline{\mathbf{C}} : (\mathbf{D}_{ges} - \mathbf{D}_{vp}), \quad (5.15)$$

wenn in (3.3) die linearisierte Verzerrungsrate $\dot{\underline{\mathbf{e}}}$ durch die Verzerrungsgeschwindigkeit $\mathbf{D} = \overset{\nabla}{\mathbf{A}}$ für große Verzerrungen ersetzt wird.

Die Betrachtung des hydrostatischen Anteils der Materialgleichung führt unter der Voraussetzung volumenkonstanten Fließens mit dem Dilatanzwinkel $\psi = 0$ zu

$$\dot{p} = -K \cdot D_{ii} = -K \cdot D_{vol}, \quad (5.16)$$

wobei der Kompressionsmodul

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (5.17)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν beschrieben wird. Die volumetrische Verzerrungsrate D_{vol} ist ein Maß für die Dichteänderung $\dot{\varrho}$ des Materials, da

$$\dot{\varrho} = \varrho_0 (1 - D_{vol}) \quad (5.18)$$

mit der Anfangsdichte ϱ_0 gilt. Der Vergleich der Massenbilanz (5.9) mit der Materialgleichung (5.16) unter Berücksichtigung des Zusammenhangs in (5.18) zeigt die Äquivalenz der Ausdrücke. Die volumetrische Verzerrung D_{vol} ist bei kompressiblem Material durch die Massenbilanz implizit festgelegt. Ausschließlich die deviatorischen Verzerrungs- und Spannungskomponenten müssen zusätzlich bestimmt werden. Als objektive Zeitableitung der Spannung wird die Jaumannrate

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} : \mathbf{W} - \mathbf{W} : \mathbf{T} \quad (5.19)$$

verwendet, welche starrkörperbewegungs- und rotationsinvariant ist.

5.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Methode

Die in der Strukturmechanik verbreitete Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode kommt zunehmend auch in der Strömungsmechanik zum Einsatz. Insbe-

sondere für Mehrfeldaufgaben wie in der Aeroelastik ist die Methode geeignet, da sie eine einheitliche Diskretisierung der Bestimmungsgleichungen für Struktur und Fluid sowie die Modellierung komplexer Geometrien ermöglicht, siehe [42]. Das im weiteren vorgestellte Berechnungsmodell basiert auf einer einheitlichen Finite-Elemente-Diskretisierung aller Modellgleichungen. Die Verwendung der Finite-Elemente-Methode für die Zeitintegration führt auf die Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode, welche Hughes und Hulbert [41] für Aufgaben der Strukturmechanik einführen. Die Methode eignet sich insbesondere für die Diskretisierung von Modellgleichungen mit überwiegend hyperbolischem Charakter, wie der Wellenausbreitung in Raum und Zeit. Weiterhin ist die Modellierung bewegter Netze, wie sie für Strömungen mit bewegten Rändern erforderlich ist, ohne zusätzlichen Aufwand umsetzbar [32, 93]. Wesentliche Arbeiten zu Raum-Zeit-FEM hinsichtlich der Diskretisierung der Modellgleichungen der Fluidmechanik stammen von Hulbert und Hughes [43, 44] sowie Tezduyar [94, 95, 96].

5.2.1 Schwache Form der Bilanzgleichung

Zur Lösung von Rand- und Anfangswertaufgaben werden die Modellgleichungen aus der starken Form in eine gewichtete Residuen-Formulierung überführt. Mit Hilfe der Multiplikation mit einer geeigneten Wichtungsfunktion w nach der Methode der gewichteten Residuen und der anschließenden Integration über das räumliche Gebiet Ω und das Zeitintervall I und nachfolgender partieller Integration folgt die schwache Form der Modellgleichungen. Die Verfahren von Galerkin führt als Wichtungsfunktion die Ansatzfunktionen für die betrachtete Beschreibungsgröße ein. Somit stehen die Residuen orthogonal auf dem Raum der Ansatzfunktionen, so daß das Verfahren die bestmögliche Lösung liefert.

Im Unterschied zu klassischen Herangehensweisen erfolgt die Integration in der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode nicht getrennt nach Raum und Zeit, sondern über das gesamte Raum-Zeit-Gebiet $Q = \Omega \times I$ und den Rand $P = P^N + P^D$.

In gemischter Formulierung gilt somit für die Berechnung des granularen Materials $\forall \delta \mathbf{v}, \delta \boldsymbol{\tau}^S, \delta p, \delta \bar{\mathbf{t}}$

$$\begin{aligned} & \int_Q \delta \mathbf{v} \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \right) dQ - \int_Q \delta \mathbf{v} \text{div} \mathbf{T} dQ + \int_Q \delta \mathbf{v} \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} dQ \quad (5.20a) \\ & + \int_Q \delta \boldsymbol{\tau}^S : \left[\underline{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\tau}}^S - (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{vp}) \right] dQ + \int_Q \delta p \cdot [K^{-1} \cdot p - \mathbf{D}_{vol}] dQ \quad (b) \end{aligned}$$

$$- \int_{P^N} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} dP + \int_{P^D} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) dP = 0. \quad (c)$$

Dabei stellt (5.20a) die schwache Form der Impulsbilanz dar, welche sich aus der Änderung des Impulses sowie den inneren und äußeren Kräften zusammensetzt. Zeile (b) zeigt die mit der Feststoffspannung $\delta \mathbf{T}^S = \delta \boldsymbol{\tau}^S + \delta p$ gewichtete Materialgleichung des Feststoffes in Ratenformulierung, welche mit ihrem hydrostatischen Anteil die Massenbilanz erfaßt. Die auf dem Dirichlet-Rand P^D aufgebrachten Randgeschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}$ sowie die auf dem Neumann-Rand P^N eingeprägten Randspannungen $\bar{\mathbf{t}}$ werden in Zeile (c) berücksichtigt.

Nach partieller Integration der Impulsbilanz, insbesondere des Anteils der Gesamtspannung \mathbf{T} , und der Aufteilung in Druck p und die mit ξ gemittelten deviatorischen Spannungen des Feststoffes $\boldsymbol{\tau}^S$ und des Fluids $\boldsymbol{\tau}^F = \Phi_1 \mathbf{D}$ folgt

$$\int_Q \delta \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{T} \, dQ = \int_Q (\operatorname{div} \delta \mathbf{v}) \, \mathbf{T} \, dQ - \int_{P^N} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, dP \quad (5.21a)$$

$$= \int_Q (\operatorname{div} \delta \mathbf{v}) \, \xi \, \Phi_1 \mathbf{D} \, dQ + \int_Q (\operatorname{div} \delta \mathbf{v}) \, p \, dQ \quad (b)$$

$$+ \int_Q (\operatorname{div} \delta \mathbf{v}) \, (1 - \xi) \, \boldsymbol{\tau}^S \, dQ - \int_{P^N} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, dP. \quad (c)$$

Für ein Newtonsches Fluid mit $\xi = 1$ und $\Phi_1 = \text{konst}$ sowie einer Vereinfachung des Materialtensors \mathbf{C} auf den Kompressionsmodul K entsprechen die genutzten Modellgleichungen der Navier-Stokes-Gleichung für kompressible Flüssigkeiten.

5.2.2 Diskretisierung

Die schwache Form der Modellgleichungen (5.20) und (5.21) dient als Grundlage für die Diskretisierung des Raum-Zeit-Gebiets Q . Dabei wird die Verteilung der Zustandsgrößen in Beschreibungsvariablen in Raum und Zeit einheitlich durch knotenweise definierte Formfunktionen \mathbf{N} approximiert. Der raumzeitliche Verlauf jeder Beschreibungsvariablen \mathbf{U} resultiert aus der Linearkombination der unbekannten Knotenvariablen $\hat{\mathbf{U}}$ mit den stückweise differenzierbaren Ansatzfunktionen \mathbf{N} , welche auf Lagrange-Polynomen basieren

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{U}}. \quad (5.22)$$

Die Transformation der globalen Raumzeitkoordinaten auf lokale Raumkoordinaten ξ_i und die Zeitkoordinate τ unter Verwendung isoparametrischer Elemente ermöglicht die Verformung der Elemente in Richtung der globalen Zeitkoordinate t . Folglich führt die Transformation zu der in Bild 5.2 dargestellten natürlichen Beschreibung zeitveränderlicher Raumgebiete. Im weiteren erfolgt die Elementdiskretisierung in zeitlicher Richtung unabhängig von den Raumkoordinaten. Somit stehen die lokalen Raumkoordinaten orthogonal zur globalen Zeitkoordinate $t(\tau)$.

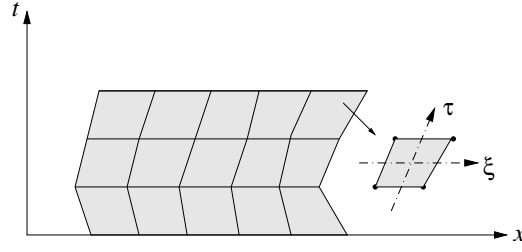


Bild 5.2: Bewegtes Raum-Zeit Gebiet

Aufgrund der verwendeten Eulerschen Betrachtungsweise für das granulare Material und der daraus resultierenden nichtlinear von der Bewegung abhängigen Zeitableitung ist eine Bestimmung der Spannungen auf Elementebene, wie in der gemischt-hybriden Formulierung bei Hübner [47], nicht durchführbar. Die in der hybriden Formulierung auftretenden Sprünge an den Elementrändern verhindern eine Bestimmung des konvektiven Anteils der Zeitableitung. Daher ist im Rahmen dieser Arbeit eine Deklaration der Spannungen als Knotenvariablen notwendig. Für den betrachteten ebenen Verzerrungszustand sind somit drei Normalspannungs- und eine Scherspannungsvariable einzubeziehen. Weiterhin ist für eine konsistente Formulierung des Phasenübergangs die Aufteilung der Spannung in Druck p und Deviatorspannung τ erforderlich. Im ebenen Verzerrungszustand folgt

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \\ & & T_{zz} \end{pmatrix} = -p \mathbf{1} + \tau = -p \mathbf{1} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \\ & & \tau_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

wobei die Spannung τ_{zz} aus der Bedingung $\text{tr } \tau = 0$ zu

$$\tau_{zz} = -\tau_{xx} - \tau_{yy} \quad (5.24)$$

resultiert. Die vier unabhängigen Spannungskomponenten sind der Druck p , die deviatorischen Anteile der Hauptspannungen τ_{xx} und τ_{yy} sowie die Scherspannung τ_{xy} in der Ebene. Die Verwendung der Druckvariablen erfordert die Umstellung der Materialgleichung. Zur Vereinfachung der Formulierung erfolgt die Aufstellung des Gleichungssystems mit den zugehörigen Verzerrungskomponenten, der volumetrischen Verzerrungsrate \mathbf{D}_{vol} sowie den deviatorischen Verzerrungsanteilen. Deshalb wird die Materialgleichung in Nachgiebigkeitsform nach Umwandlung der tensoriellen Schreibweise in Matrizenschreibweise verwendet

$$\begin{pmatrix} D_{vol} \\ D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \end{pmatrix}_{el} = \underline{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\mathbf{T}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} -3(1-2\mu) & & & \\ (2\mu-1) & 1+\mu & & \\ (2\mu-1) & & 1+\mu & \\ & & & 1+2\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_{xx} \\ \dot{\tau}_{yy} \\ \dot{\tau}_{xy} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Die Auswertung der Integrale der schwachen Form erfolgt auf Elementebene mittels Gaußpunktintegration. Die veränderlichen Materialkennwerte, Viskosität Φ_1 und viskoplastische Verzerrungsrate \mathbf{D}_{vp} , welche nichtlinear vom verwendeten Material abhängen, folgen aus den Zustandsgrößen des letzten Iterationsschrittes am Gaußpunkt. Mit Hilfe der Ansatzfunktionen im Element ist es möglich, die benötigten Werte für die zweite Invariante der Verzerrungsgeschwindigkeit J_2^D und die Grenzscherspannung T_f zu bestimmen.

5.2.3 Zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren

Die vollständige Diskretisierung der Modellgleichungen in Raum und Zeit resultiert in zu bestimmenden Freiwerten, deren Anzahl die eines klassischen semi-diskreten Ansatzes um ein Vielfaches übersteigt. Unter Ausnutzung des Informationsflusses, der ausschließlich in positiver Zeitrichtung erfolgt, ist eine Unterteilung der globalen Zeitkoordinate in eine sequentielle Abfolge von Zeitintervallen $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ mit diskreten Zeitpunkten t_n zulässig. Die Sequenzierung führt zu einer deutlich effizienteren numerischen Formulierung mit einer verminderten Anzahl an Freiwerten. Die Auswertung der Modellgleichungen in den so entstehenden Raum-Zeit-Scheiben $Q_n = \Omega_t \times I_n$ erfolgt sequentiell, wobei die Lösung der aktuellen Zeitscheibe nur aus den vorangegangenen Zeitschritten folgt. Im verwendeten zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahren sind die gewählten Ansatzfunktionen nur innerhalb einer Raum-Zeit-Scheibe C^0 -kontinuierlich und können an den Übergängen zwischen zwei Zeitintervallen Sprünge aufweisen. Die Unabhängigkeit der Freiwerte zu Beginn jedes Zeitintervalls von der vorangegangenen Zeitscheibe führt zu einer Verdopplung der benötigten Freiwerte. Das implizite, A-stabile Zeitintegrationsverfahren 3. Ordnung für lineare Ansätze in der Zeit [55] rechtfertigt den erhöhten Rechenaufwand. Für zeitveränderliche Raumgebiete sind die Netze somit diskontinuierlich wie in Bild 5.3 dargestellt ist. Der in Bild 5.4 dargestellte ent-

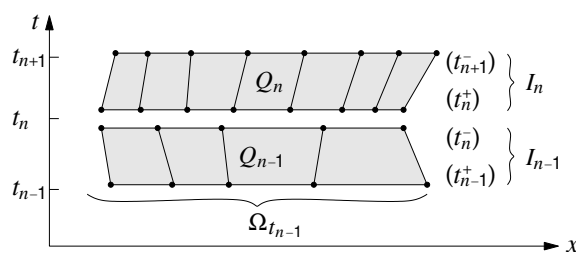


Bild 5.3: Diskontinuierliches Raum-Zeitgebiet

koppelte Verlauf einer zeitlich veränderlichen Beschreibungsvariable U über die Zeit erfordert Übergangsbedingungen zwischen aufeinanderfolgenden Zeitintervallen, um die Massen- und Impulserhaltung am Zeitscheibenübergang zu gewährleisten. Die Anfangsbedingung für jedes Zeitintervall folgt somit aus der Lösung der vorangegangenen

Zeitscheibe. Die Einbindung der Sprungterme für alle Beschreibungsgrößen, die zeitliche Ableitungen in den Modellgleichungen aufweisen, v und \mathbf{T} , in schwacher Form

$$\int_{\Omega_n} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \varrho (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) \, d\Omega + \int_{\Omega_n} \delta \mathbf{T}(t_n^+) : \underline{\mathbf{C}}^{-1} : (\mathbf{T}(t_n^+) - \mathbf{T}(t_n^-)) \, d\Omega \quad (5.26)$$

in (5.20) ermöglicht die entsprechend den Ansatzfunktionen bestmögliche Erfüllung der Übergangsbedingung. Dabei bezeichnen $\mathbf{v}(t_n^+)$ und $\mathbf{T}(t_n^+)$ die Freiwerte am Anfang der aktuellen Zeitscheibe und $\mathbf{v}(t_n^-)$ und $\mathbf{T}(t_n^-)$ die Werte am Ende des vergangenen Zeitintervalls.

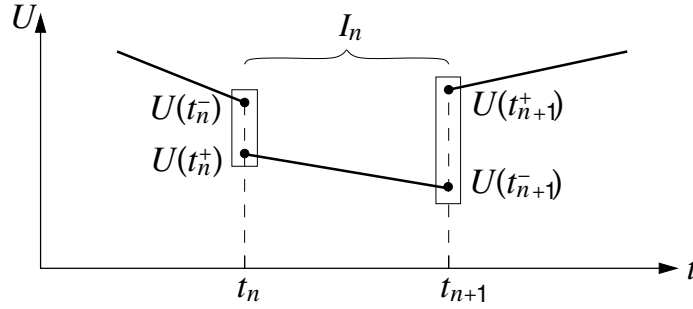


Bild 5.4: Zeitdiskontinuierlicher Ansatz

5.2.4 Stabilisierung

Die Verwendung der Finite-Elemente-Methode mit linearen Ansätzen für Druck und Geschwindigkeit und einer Standard-Galerkin-Wichtung führt bei konvektionsdominierten Aufgabenstellungen zu unphysikalischen, oszillierenden Lösungen. Zur Verbesserung von Konvergenz und Stabilität der Lösung der Modellgleichungen wird eine Galerkin-/Least-Squares-Stabilisierung auf die Raum-Zeit-Formulierung angewendet. Die Methode geht auf Hughes und Hulbert [41] zurück. Die Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen erfordert die Berücksichtigung des Informationsflusses der Wellenausbreitung. Der Least-Squares-Term

$$\sum_e \int_{Q^e} \frac{1}{\varrho} \mathcal{L}(\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{T}) \kappa_{stab} (\mathcal{L}(\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{T}) - \varrho \mathbf{b}) \, dQ \quad (5.27)$$

mit

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{T}) = \varrho \frac{dv}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{T} (p, \mathbf{D}, \varrho) \quad (5.28)$$

erweitert die schwache Form der Impulsbilanz (5.20a). Die nach der Erweiterung der Wichtungsfunktion um den konvektiven Anteil des Differentialoperators $\mathcal{L}(U)$ entstehende Methode heißt Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Verfahren (SUPG). Der

Least-Squares-Term hinsichtlich δp gewährleistet die Stabilität der Lösung für beliebige Ansatzordnungen ohne explizite Erfüllung der Babuška-Brezzi-Bedingung. Für den Faktor κ_{stab} existieren lediglich für eindimensionale Aufgabenstellungen optimale Werte, welche sich beispielsweise bei Tezduyar [96] aus der Norm der Elementmatrixanteile ergeben.

Im Unterschied zu den in [47] verwendeten gemischt-hybriden Elementen erfordert das Verfahren im vorliegenden Fall keinen besonderen programmtechnischen Aufwand, da alle Variablen knotenweise definiert sind. Die Least-Squares-Terme der Materialgleichung haben nach Hübner [47] nur einen geringen Einfluß auf das Gleichungssystem. Die Verwendung der Druckstabilisierung führt insbesondere für hohe Steifigkeiten und somit nahezu inkompressiblem Materialverhalten zu einer Verbesserung der Ergebnisse. Sie entspricht dem Stabilisierungsterm in Gleichung (5.27) unter ausschließlicher Berücksichtigung des Druckterms im Differentialoperator \mathcal{L} . Der Stabilisierungsparameter wird zu

$$\kappa_{stab} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2|v_{rel}|}{h}\right)^2}} \quad (5.29)$$

gesetzt, wobei unabhängig vom aktuellen Fließzustand die relative Geschwindigkeit v_{rel} statt der von Hübner verwendeten Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c für die Feststoffbeschreibung angewendet wird. Die Modifikation folgt aus der Eulerschen Betrachtungsweise, welche eine Bestimmung der Gesamtgeschwindigkeit ermöglicht.

Es ist zu beachten, daß die Vernachlässigung der Ableitung $\partial^2/\partial x \partial y$ der Ansatzfunktionen im linearen Vierknotenelement für große Deviatorspannungen zu einer Verschlechterung des Ergebnisses führt. Weiterhin ist für große Viskositäten, wie sie aus (2.11) folgen, der Stabilisierungsparameter der Übergangsbedingung der Fluid-Fluid-Kopplung anzupassen. Es zeigt sich, daß er kleiner $1/\Phi_1$ gewählt werden sollte.

5.3 Abbildung des Feststoffmodells in Eulerscher Betrachtungsweise

Die in der Strukturmechanik gebräuchliche Lagrangesche Betrachtungsweise kann aufgrund der großen zu beschreibenden Verformungen des Granulars und des flüssigkeitsähnlichen Materialverhaltens in die gewünschten Beispiele ausschließlich für die Beschreibung der verformbaren Silostruktur angewendet werden. Insbesondere während des Entleerungsvorganges von Silos bewegt sich das granulare, mittels Feststoffmodell beschriebene Material innerhalb eines nahezu konstanten Kontrollvolumens. Daher ist eine Anpassung des Materialmodells zur Darstellung des Feststoffverhaltens in (4.10) auf die Eulersche Betrachtungsweise erforderlich.

5.3.1 Wahl des Bezugssystems

Neben den bereits beschriebenen Betrachtungsweisen bezüglich der Ausgangskonfiguration Ω_0 bzw. der Momentankonfiguration Ω_t existiert die Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Betrachtung, die die Bewegung eines Körpers über eine bewegliche Referenzkonfiguration $\hat{\Omega}$ zu beschreibt. Die vorgegebene oder berechnete Bewegung der Referenzkonfiguration entspricht einer Verschiebung des Berechnungsnetzes zum Ort χ , siehe Bild 5.1. Damit folgt der Ortsvektor der Momentankonfiguration \mathbf{x} aus der Transformation

$$\mathbf{x} = \hat{\Phi}(\Psi(\mathbf{X}, t), t), \quad (5.30)$$

wobei Ψ die Abbildung der Ausgangskonfiguration auf die Referenzkonfiguration ist. Der Vorteil einer solchen Formulierung gegenüber der Lagrangeschen, in welcher das Berechnungsnetz dem Material folgt, ist die Vermeidung großer Netzverzerrungen und der damit erforderlichen Neuvernetzung. Andererseits ermöglicht sie im Gegensatz zur räumlichen Betrachtungsweise eine Beschreibung freibeweglicher Gebietsränder[21]. Die Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Betrachtung ist unmittelbar in die Lagrange-sche Betrachtungsweise überführbar, indem die Referenzkonfiguration ortsfest bleibt. Ebenso folgt die Eulersche Betrachtungsweise für $\mathbf{x} = \chi$.

Aufgrund ihrer interpolierenden Eigenschaft wird die ALE-Methode insbesondere für Strömungen mit beweglichen Rändern verwendet. Die in dieser Arbeit genutzte und in Abschnitt 5.4.1 beschriebene Fluid-Struktur-Kopplung basiert auf einem analogen Verfahren [48]. Zur Vermeidung zusätzlicher Kontaktalgorithmen wie der Knoteninterpolation zwischen Fluid bzw. granularem Material und Struktur ist eine Anpassung des Fluidnetzes an die Bewegung der Struktur erforderlich, wie in Bild 5.5 links dargestellt ist.

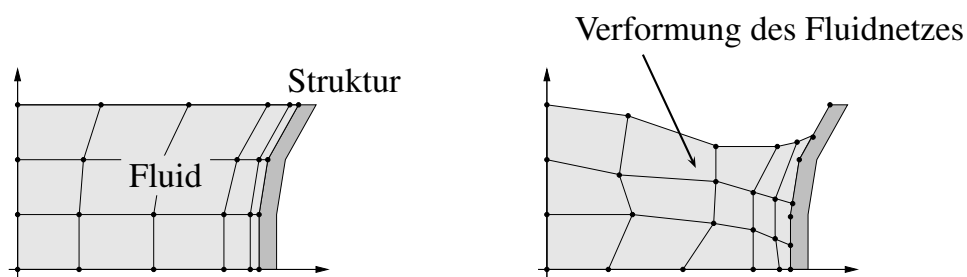


Bild 5.5: Verformung Struktur und Fluid mit verschiedenen Netzbewegungen

Die Anwendung der ALE auf die Bewegungsbeschreibung des granularen Materials erlaubt die Verfolgung der Oberfläche, führt jedoch zu einer unerwünschten, gegenseitigen Verschiebung zwischen den Berechnungsnetzen der umliegenden Struktur und des Granulars, siehe Bild 5.5 rechts. Eine konsistente Formulierung ist nur für Hafttrand-

bedingungen, zwischen den beiden Berechnungsgebieten möglich. Um jedoch die Entleerung von Silos zu modellieren, ist eine Beschreibung der gegenseitigen, reibungsdominierten Bewegung von Schüttgut und Silowand notwendig.

Daher erfolgt im Rahmen dieser Arbeit die Bewegungsbeschreibung für das granulare Material analog zu einer Flüssigkeit in einer Eulerschen Betrachtungsweise mit beweglichen Gebietsrändern infolge der Wandverformung. Die Beschreibung der Silowand erfolgt hingegen in der für Strukturbetrachtungen üblichen Lagrangeschen Betrachtungsweise.

5.3.2 Bestimmung der Verschiebung

Zur Beschreibung des Materialverhaltens, welches einen Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung herstellt, ist die Verfolgung der Materialteilchen erforderlich. Die Bestimmung der Verschiebungen aus den Geschwindigkeiten erfolgt mittels Zeitintegration, welche in Lagrangescher Betrachtungsweise unmittelbar möglich ist, da das Tensorfeld objektiv und die Ableitung zeitinvariant ist. Aufgrund der nichtlinearen Form der Oldroyd-Ableitung (5.6) ist eine Bestimmung der Almansischen Verzerrung \mathbf{A} eines am Ort \mathbf{x} befindlichen Materialteilchens mittels Zeitintegration der Deformationsgeschwindigkeit nicht unmittelbar möglich. Bisherige Lösungsansätze sind die molekulare Punktverfolgung, stochastische Ansätze oder die materielle Rückverfolgung. Einige dieser Ansätze werden im weiteren erläutert.

Iterative Integration der zeitabhängigen Größen Die Beziehung zwischen Verschiebung und Geschwindigkeit eines Materialteilchens ist in Gleichung (5.4) angegeben. Aufgrund des konvektiven Anteils der materiellen Zeitableitung ist die zeitliche Integration der Geschwindigkeit zur Bestimmung der Verschiebung nur iterativ möglich. Es ist deshalb erforderlich, die Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit separat zu lösen. Die Bestimmung der zeitlichen und örtlichen Ableitung der Verschiebung erfordert die Abspeicherung der Verschiebung vergangener Zeitschritte sowie die Beachtung entsprechender Randbedingungen. Insbesondere an Einströmrändern instationärer Bewegungszustände sind Annahmen über den Verlauf der Bahnlinien zu treffen.

Bahnlinienverfolgung Ein anderer Ansatz zur Berechnung der Verschiebung beruht auf der Bestimmung der Bahnlinien einzelner Materialteilchen in einem stationären Bewegungsfeld. Für stationäre Bewegungsfelder bewegen sich die Materialteilchen entlang der Stromlinien. Das Verfahren ermöglicht einen Punktverfolgungsalgorithmus, wie Dupont [22] ihn zur Beschreibung eines viskoelastischen Fluids verwendet. Die

Verzerrungsgeschichte folgt aus den analytisch exakt bestimmten Knotenverschiebungen, führt aber für große Verschiebungen zu Verzerrungsungenauigkeiten.

Für instationäre Felder entspricht die Verschiebung des Materialteilchens **B** in Bild 5.6 zum Zeitpunkt $t = t_1$ der Differenz des aktuellen Ortsvektors und der in jedem Zeitschritt wiederholt iterativ ermittelten Ausgangslage **A**. Die vom betrachteten Materialteilchen durchlaufene Bahn folgt aus der linearen Zeitintegration seiner Geschwindigkeit. In einem ersten Iterationsschritt führt die Verwendung der Momentangeschwindigkeit v_1 zur angenäherten Ausgangslage **B***. In einem zeitlich und räumlich veränderlichen Geschwindigkeitsfeld beschreibt das Materialteilchen, welches zu Beginn am Punkt **B*** ist, eine unabhängige Bahnlinie.

Im weiteren Ablauf der Berechnung liefert der Mittelwert zwischen v_1 und der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 des ermittelten Ausgangspunktes die Geschwindigkeit des Materialteilchens. Die Iteration ist abgeschlossen sobald die Verschiebung konsistent zu den Geschwindigkeiten zu Beginn und Ende des betrachteten Zeitintervalls ist. Im Rahmen dieser Vorgehensweise sind zusätzliche Annahmen für die Verschiebungen an Einströmrändern zu treffen, da an diesen die Ausgangsposition eines Materialteilchens nicht bestimmbar ist.

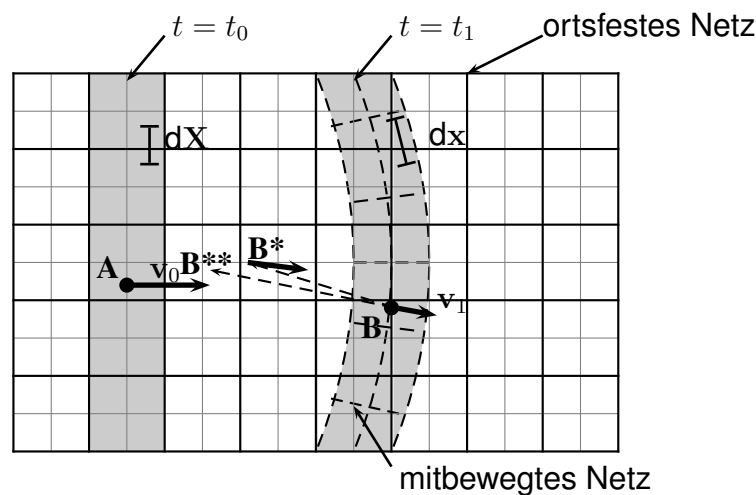


Bild 5.6: Verschiebung eines Balkens in ortsfestem Bezugssystem

Transport der Geschichtsfunktionen In der von Peters [75] vorgestellten Herangehensweise repräsentiert eine endliche Anzahl von Verschiebungsfeldern die Deformationsgeschichte. Das zeitlich veränderliche Strömungsfeld transportiert das jedem Zeitpunkt zugeordnete Verschiebungsfeld, welches um die zusätzliche Verschiebung aktualisiert wird. Somit folgt die Materialgeschichte aus der einmaligen Lösung der Transportgleichung ohne weitere Iteration und Rückverfolgung. Die Erweiterung von Hulsén [45] speichert die vorangegangenen Verschiebungsfelder relativ zur aktuellen Zeit. Peters verwendet diese Herangehensweise zur Beschreibung des Fließens visko-

elastischer Fluide.

Aus der Verschiebung resultieren Verzerrungen, die mit den Spannungen verknüpft werden. Mit Hilfe der Abbildung des Spannungintegrals als endliche Summe der diskreten Spannungswerte ist die Beschreibung eines Materialverhaltens unter Berücksichtigung der Spannungsgeschichte möglich.

Für die Verwendung der Spannung in der Impulsbilanz ist es sinnvoll, die Spannung direkt zu bestimmen. Dazu erfolgt der Aufbau und Transport eines Spannungsfeldes, welches in jedem Zeitintervall infolge der Spannungsinkremente aktualisiert wird. Dieser Ansatz wird beispielsweise von Crochet [17] und Keunings [57] verfolgt.

Umsetzung mittels der Raum-Zeit-FEM Aus den beschriebenen Methoden zur Bestimmung der Verschiebungen in Eulerscher Betrachtungsweise wird im Rahmen dieser Arbeit der Ansatz, die zeitliche Integration der Geschwindigkeiten mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode durchzuführen, verfolgt. Die Raum-Zeit-FEM bietet die Möglichkeit, zeitliche Ableitungen unmittelbar zu bestimmen, da die lokale Zeitableitung jeder Beschreibungsvariablen innerhalb einer Zeitscheibe mit Hilfe der Formfunktion und der Knotengröße berechnet werden kann. So folgt die Zeitableitung der Spannung

$$\dot{\mathbf{T}}^S = \frac{\partial \mathbf{T}^S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T}^S \quad (5.31)$$

mit der Formfunktion \mathbf{N} und ihren räumlichen und zeitlichen Ableitungen und den Knotengrößen $\hat{\mathbf{T}}^S$ zu

$$\dot{\mathbf{T}}^S = (\mathbf{N}_{,t} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{N}_{,i}) \hat{\mathbf{T}}^S \quad (5.32)$$

Die Feststoffspannung zu jedem Zeitpunkt folgt stets aus dem so ermittelten Spannungsinkrement innerhalb der Zeitscheibe und der Anfangsbedingung zu Beginn der Zeitscheibe.

Die direkte Berechnung der Zeitableitung jeder Größe kann auch zur Bestimmung der Verschiebung, wie im ersten vorgestellten Lösungsansatz, genutzt werden. Die Wahl der Feststoffspannung ist als unabhängige Größe geeignet, weil diese unmittelbar in die Bilanzgleichungen Eingang finden. Weiterhin ist es möglich, den von Peters vorgestellten Informationstransport über die Materialspannung umzusetzen. Dazu ist lediglich die Lösung der Gleichung (5.32) in einem unabhängigen Gleichungssystem notwendig, wobei die resultierenden Spannungen an das Gesamtgleichungssystem übergeben werden. Zur Bestimmung der Gesamtspannung ist die Berechnung der viskoplastischen Dehnungsrate \mathbf{D}_{vp} für jedes Materialteilchen erforderlich.

5.3.3 Berechnung der viskoplastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten

Für viskoplastisches Materialverhalten folgen die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten aus Gleichung (3.10). Sie hängen somit vom aktuellen Spannungsniveau ab, das über Gleichung (3.3) mit den Verzerrungen in Zusammenhang steht. Daher ist eine iterative Lösung der Bestimmungsgleichung der Verzerrungsgeschwindigkeiten erforderlich. Im Unterschied zu anderen Zeitintegrationsverfahren werden die Modellgleichungen in der Raum-Zeit-Finite Elemente-Methode für eine gesamte Zeitscheibe gelöst. Daher sind sowohl Spannungen als auch deren zeitliche Ableitung unmittelbar für jeden Punkt im Raum-Zeit-Gebiet bestimmbar. Die iterative Berechnung der viskoplastischen Verzerrungsrate erfolgt an den Gaußpunkten, um einen Aufbau des Gesamtgleichungssystems zur Lösung der schwachen Form der Bilanzgleichungen zu ermöglichen und weitere Interpolationsfehler zu vermeiden. An jedem räumlichen Gaußpunkt ist die Spannung zu Beginn der Zeitscheibe \mathbf{T}_{GP}^0 bekannt. Die Spannung ist jedoch einem anderen Materialteilchen als dem zum Zeitpunkt t^{GP} am Gaußpunkt befindlichen Materialteilchen M zuzuordnen. Es ist jedoch ein Bezug auf die Spannung \mathbf{T}_M^0 des Materialteilchens M zu Beginn der Zeitscheibe notwendig, da das Materialmodell die Verzerrung eines Materialteilchens in der Zeit beschreibt. Die Spannung folgt unter Berücksichtigung der konvektiven Zeitableitung zu

$$\mathbf{T}_M^0 = \mathbf{T}_{GP}^0 - \mathbf{T}_{konv}^0 = \mathbf{T}_{GP}^0 - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} \cdot \Delta t^{GP}. \quad (5.33)$$

Die oberen Indizes kennzeichnen den betrachteten Zeitpunkt, die unteren den Ort. Die erste Iteration liefert die aktuelle Spannung am Gaußpunkt aus der Spannung des Materialteilchens zu Beginn der Zeitscheibe, dem Spannungsprädiktor $\Delta \mathbf{T}$ und dem Zeitintervall vom Beginn der Zeitscheibe bis zum betrachteten Gaußpunkt $\Delta t^{GP} = t^{GP} - t^0$

$$\mathbf{T}_M^{GP} = \mathbf{T}_M^0 + \Delta \mathbf{T} \cdot \Delta t^{GP} \quad (5.34)$$

wobei der Prädiktor aus

$$\Delta \mathbf{T} = \underline{\mathbf{C}} : \mathbf{D} \quad (5.35)$$

oder

$$\Delta \mathbf{T} = (\mathbf{T}_{M_{iter}}^{GP} - \mathbf{T}_M^0) / \Delta t^{GP} \quad (5.36)$$

folgt. Dabei ist $\mathbf{T}_{M_{iter}}^{GP}$ die Spannung am Gaußpunkt aus der letzten Iteration zur Lösung der schwachen Form der Bilanzgleichungen (5.20). Die Verwendung von (5.36) führt jedoch im ersten globalen Iterationsschritt stets zu einem verschwindenden Prädiktorschritt und somit meist zu einer verminderten Konvergenz im Vergleich mit (5.35). Anschließend erfolgt die Bestimmung der viskoplastischen Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}_{vp} mit der ermittelten Spannung des Materialteilchens am betrachteten Gaußpunkt

\mathbf{T}_M^{GP} . Nach der Lösung der Bestimmungsgleichung (3.10) folgt eine Modifikation des elastischen Prädiktors zu

$$\Delta \mathbf{T}' = \Delta \mathbf{T} - \underline{\mathbf{C}} : \mathbf{D}_{vp} \quad (5.37)$$

bis die Änderung der Spannung eine vorgegebene Fehlergrenze unterschreitet. Die ermittelten viskoplastischen Verzerrungsraten werden beim Aufbau des Gesamtgleichungssystems (5.20) als Teil des Residuums berücksichtigt.

5.4 Berechnung randgekoppelter Systeme

Mehrfeldaufgaben erfordern die Lösung unterschiedlicher Modellgleichungen in gekoppelten Gebieten. Neben volumengekoppelten Aufgabenstellungen in der Mischungstheorie stellen oberflächengekoppelte Aufgaben einen wesentlichen Aspekt dar. Für die Lösung von Mehrfeldaufgaben existieren verschiedene Ansätze. Sie unterscheiden sich bezüglich des Kopplungsalgorithmus in partitionierte Lösungsverfahren mit schwacher [65, 101] und starker Kopplung [62, 78, 90] und simultane Lösungsverfahren [48]. Zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften des gekoppelten Systems und zur Steigerung der numerischen Effizienz wird im Rahmen dieser Arbeit ein simultanes, monolithisches Verfahren verwendet. Das Gesamtgleichungssystem enthält die diskretisierten Modellgleichungen aller Teilgebiete und die Kopplungsbedingungen.

5.4.1 Fluid-Struktur-Kopplung

Es existieren zahlreiche Phänomene, welche mit Hilfe randgekoppelter Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur erklärbar sind. Die Beschreibung von weitgespannten Tragwerken unter Windeinwirkung, des Wellenschlags auf Schiffe und der Durchströmung von Blutgefäßen ist nur unter Berücksichtigung der Kopplung beider Medien möglich, deren gemeinsame Grenzfläche zeitlich veränderlich ist. Für die Simulation von Entleerungsvorgängen in Silos ist vor allem die Interaktion zwischen Schüttgut und Silowand von Bedeutung. Weiterhin erfordern insbesondere die unterschiedlichen Betrachtungsweisen beider Gebiete und die somit notwendige Anpassung des ortsfesten Berechnungsgebietes auf zeitlich veränderliche Ränder spezielle Beachtung.

Kopplungsbedingungen

Die Kopplungsbedingungen gewährleisten die Kontinuität von Kraft- und Weggrößen entlang der gemeinsamen Grenzfläche. Die Kontinuität der Weggrößen erzwingt die

geometrischen Übergangsbedingungen, so daß weder Lücken noch Überlappungen auftreten. Die Formulierung aller Modellgleichungen in Geschwindigkeitsvariablen \mathbf{v} ermöglicht bei identischer Diskretisierung die knotenweise Kopplung der Freiwerte für das Fluid und die umliegende Struktur, gekennzeichnet mit F bzw. St , in normaler Richtung \mathbf{n} der Grenzfläche

$$\mathbf{v}^{St} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n}. \quad (5.38)$$

Dabei umfasst das Fluid das gesamte granulare Material bestehend aus festen und flüssigen Anteilen. Die Verwendung von Randspannungen \mathbf{t} entlang der gemeinsamen Fläche als Lagrange-Multiplikatoren zur Wichtung der Geometriebedingung führt zu einer einheitenkonformen Formulierung der Kopplungsbedingung

$$\int_{P^D} \delta \mathbf{t}^F \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^{St}) \cdot \mathbf{n} \, dP^D = 0 \quad (5.39)$$

entsprechend einer Dirichlet-Randbedingung für das Fluid, welche in (5.20) eingebunden wird. Die Erfüllung des Kräftegleichgewichts entlang der Grenzfläche erfordert die Transformation der Spannungen im Fluid aus der Momentankonfiguration in die Konfiguration der Struktur, welche bezüglich der Referenzkonfiguration beschrieben wird

$$\mathbf{t}_0^{St} = \left(\frac{d\Gamma^C}{d\Gamma_0^C} \right) \mathbf{t}^F. \quad (5.40)$$

Die einheitenkonforme Formulierung nach Galerkin erfordert die Wichtung des Gleichgewichts (5.40) mit den virtuellen Geschwindigkeiten $\delta \mathbf{v}$ entlang der Grenzfläche

$$-\int_{P^N} \delta \mathbf{v}^F \mathbf{t}_F \, dP^N + \int_{P^N} \delta \mathbf{v}^{St} \left(\frac{d\Gamma^C}{d\Gamma_0^C} \mathbf{t}_F \right) \, dP^N = 0. \quad (5.41)$$

Dabei entspricht der zweite Term in (5.41) einer Neumann-Randbedingung für die Struktur.

Die Bestimmung von Geschwindigkeit und Spannung tangential zur Grenzfläche folgt aus den gewählten Übergangsbedingungen. Neben den bereits eingeführten Übergangsbedingungen (5.38) und (5.40) ist eine weitere Bestimmungsgleichung erforderlich. Hafttrandbedingungen erfordern zusätzlich die Kontinuität der Geschwindigkeiten in tangentialer Richtung \mathbf{s} , welche mit den Spannungsfreiwerten in dieser Richtung gewichtet werden

$$\int_{P^D} \delta \mathbf{t}_F \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^{St}) \cdot \mathbf{s} \, dP^D = 0. \quad (5.42)$$

Für reibungsbehaftete Ränder sind die tangentialen Geschwindigkeiten von Fluid und Struktur entkoppelt. Somit ist eine zusätzliche Bestimmungsgleichung für die maximal aufnehmbaren Spannungen notwendig, welche aus einem Zusammenhang zwischen Normal- und Tangentialspannungen und dem Coulombschen Reibungsbeiwert μ folgen

$$\mathbf{t}^F \cdot \mathbf{s} = \mathbf{t}^F \cdot \mathbf{n} \cdot \mu. \quad (5.43)$$

Die Einführung einer Glättungsfunktion für den Übergang zwischen Haft- und Gleitrandbedingungen zur Vermeidung numerischer Instabilitäten führt auf einen geschwindigkeitsabhängigen Reibungsbeiwert $\bar{\mu}$

$$\bar{\mu} = \mu \cdot \left(1 - e^{-\alpha |v_s|^\beta}\right). \quad (5.44)$$

Für große Tangentialgeschwindigkeiten zeigt $\bar{\mu}$ eine gute Übereinstimmung mit dem Gleitreibungskoeffizienten, während er für geringe Geschwindigkeiten stark abnimmt und somit Haftrandbedingungen abbildet.

Netzbewegung

Die überlappungsfreie Kopplung der beiden Kontinua erfordert die Bewegung des Fluidnetzes, wenn sich die Struktur bezüglich ihrer Ausgangskonfiguration verschiebt. Die Raum-Zeit-Finite-Elemente Methode bildet das zeitlich veränderliche, räumliche Gebiet ab. Der Einsatz isoparametrischer Elemente ermöglicht die Berücksichtigung der Netzbewegung analog zu der in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen ALE Betrachtung, so daß die Beschreibung des Fluids weiterhin in der Momentankonfiguration erfolgt. Die ausschließliche Verschiebung der Netzknoten entlang der Grenzfläche führt oftmals zu unzulässigen Netzverzerrungen. Daher erfolgt alternativ eine Bewegung des gesamten Fluidnetzes. Dazu ersetzt eine Pseudo-Struktur wie bei Walhorn [100] das Fluidnetz, wobei die Zuweisung der Steifigkeit zu jedem Pseudoelement umgekehrt proportional zu seiner Größe erfolgt. Die Verschiebung jedes Netzknotens resultiert aus der Verschiebung der elastischen Pseudo-Struktur infolge der aufgetragenen Randverschiebungen. Die Lösung der erforderlichen Struktur Aufgabe erfolgt getrennt am Ende jedes Zeitschrittes unabhängig von der Lösung der Modellgleichungen innerhalb des Fluidgebiets. Für große Strukturverformungen kann allerdings eine Neuvernetzung unabdingbar sein.

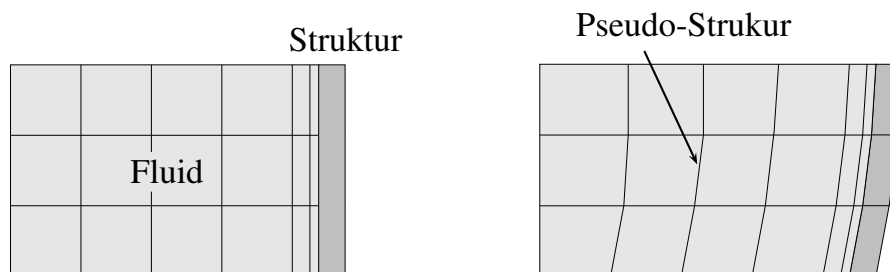


Bild 5.7: Netzverformung und Pseudo-Struktur

5.4.2 Fluid-Fluid-Kopplung

Während sich die Grenzfläche zwischen Fluid und Struktur nur moderat ändert und somit explizit vorgegeben werden kann, treten im Zusammenhang mit Fluiden mit freien Oberflächen große Gebietsänderungen auf. Stark verformbare, topologisch veränderliche Grenzflächen existieren beispielsweise zwischen zwei unmischbaren Fluiden, bei Einschlüssen fremden Materials in ein umgebendes Gebiet und bei wandernden Fronten chemischer Reaktionen. Ebenso kann die Lage der Oberfläche eines granularen Materials zur umgebenden Luft beschrieben werden. Die Lage der Grenzfläche folgt aus dem physikalischen Verhalten der angrenzenden Phasen und der Lösung der gekoppelten Modellgleichungen.

Oberflächenbeschreibung

Für die Beschreibung zeitlich veränderlicher Gebiete existieren verschiedene Verfahren, die sich in Grenzflächen- und Gebietsverfolgungsverfahren unterteilen. Der Vorteil der im weiteren verwendeten Gebietsverfolgungsverfahren liegt in der topologisch eindeutigen Verknüpfung der Kontaktflächenpunkte zwischen angrenzenden Gebieten. Man unterscheidet explizite und implizite Verfahren der Grenzflächenmodellierung. Im Rahmen expliziter Verfahren ist es erforderlich, die Kontaktfläche geeignet zu approximieren und mit der Geschwindigkeit auf der Grenzfläche zu transportieren. Bei großen Gebietsverschiebungen und topologischen Änderungen ist jedoch eine Neuvernetzung erforderlich. Flexiblere, implizite Verfahren ermöglichen die Bestimmung der Lage der Grenzfläche aus der Verteilung einer Hilfsgröße, welche eine eindeutige Zuordnung der Raumpunkte zu einem Gebiet ermöglicht. Das in dieser Arbeit verwendete implizite Verfahren nach Kölke [59] ist insbesondere bei randkonformer Formulierung sehr effektiv.

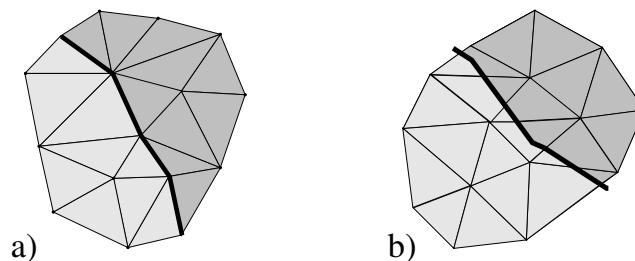


Bild 5.8: Explizite a) und implizite b) Grenzflächen

Level-Set-Methode

Die Unterscheidung impliziter Verfahren erfolgt anhand der gewählten Hilfsgröße. So führen Harlow und Welch [33] die partikelbasierte Marker-and-Cell-Methode ein. Die Identifizierung der Teilgebiete folgt aus der Zuordnung von Punktpartikeln. Diese bewegen sich aus dem Ausgangszustand in Lagrangescher Betrachtungsweise durch das umgebende Teilgebiet. Die Partikelverfolgung führt zu einer ungleichmäßigen räumlichen Verteilung der Markerpunkte und somit zu einer notwendigen Neuverteilung der Punkte.

Die von Hirt und Nichols vorgestellte Volume-of-Fluid-Methode [36] umgeht diese Problematik durch die Einführung einer skalaren Funktion Ψ , welche im gesamten Berechnungsgebiet definiert ist. Im ersten Teilgebiet nimmt Ψ den Wert 1 an, während die Funktion im zweiten 0 ist. Die Funktion wird im Geschwindigkeitsfeld der physikalischen Lösung der Modellgleichungen transportiert und markiert mit der Lage des Sprungs die Grenzfläche. Die Unterscheidung der Teilgebiete ist ohne zusätzlichen Aufwand möglich, jedoch aufgrund des numerisch schwierigen Transports der Sprungfunktion netzabhängig und unscharf.

Zur Vermeidung von Verschmierungseffekten beim Transport der Sprungfunktion modifizieren Osher und Sethian [72] die Hilfsgröße in eine kontinuierliche, stetige Funktion Φ , die Level-Set-Funktion. Sie entspricht einer Abstandsfunktion jedes Raumpunktes zur Grenzlinie und beschreibt somit die Lage der Diskontinuität als Nullisolinie. Entsprechend des Vorzeichens der Level-Set-Funktion erfolgt die Zuordnung von Materialkennwerten zu bestimmten Raumpunkten. Die Bewegung der Level-Set-Funktion folgt aus der Transportgleichung

$$\Phi_{,t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = 0, \quad (5.45)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Phi(t_0) - \Phi_0 = 0, \quad (5.46)$$

welche die anfängliche Grenzflächenlage festlegt, und der Randbedingung

$$\Phi - \bar{\Phi} = 0 \quad \text{auf } P \quad \text{für } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0 \quad (5.47)$$

für alle Einströmränder. Somit ist eine Information über die Level-Set-Funktion für alle in das Gebiet Ω eintretenden Punkte gewährleistet. Das Verfahren liefert die beste Lösung bei einer mit der Abstandsform konsistenten Wahl der Anfangs- und Randbedingungen. Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Level-Set-Gleichung für

die Raum-Zeit-Scheibe $Q_n = \Omega_t \times I_n$ lautet nach Kölke [59] $\forall \delta \Phi$

$$\int_{Q_n} \delta \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \right) dQ \quad (5.48a)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta \Phi(t_n^+) (\Phi(t_n^+) - \Phi(t_n^-)) dQ \quad (b)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \mathcal{L}(\delta \Phi) \kappa_L \mathcal{L}(\Phi) dQ \quad (c)$$

$$+ \int_{P_n^\Phi} \delta \Phi \frac{1}{\epsilon} (\Phi - \bar{\Phi}) dP . \quad (d)$$

Dabei stellt (5.48a) die schwache Form der Transportgleichung (5.45) und (b) den Sprungterm der diskontinuierlichen Galerkin-Formulierung zwischen den Zeitscheiben dar. Zeile (c) gibt die erforderliche Stabilisierung analog zu Abschnitt 5.2.4 mit

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad (5.49)$$

an. Der Parameter κ_L wird aufgrund der advektiven Transportgleichung der Level-Set-Funktion entsprechend Gleichung (5.29) bestimmt. Zeile (d) bindet die Integralformulierung der Dirichlet-Randbedingung gewichtet mit dem Penalty-Faktor ϵ in die schwache Formulierung ein.

Abbildung der Diskontinuität

An der Grenzfläche zwischen zwei Teilgebieten mit unterschiedlichen Modellgleichungen können Diskontinuitäten in den Beschreibungsvariablen auftreten. Zur Darstellung eines solchen Verlaufs und zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften der Lösung findet im Folgenden das von Kölke [59] vorgestellte Verfahren Anwendung. Aufgrund der stetigen, linearen Ansatzfunktionen im räumlichen Dreiknotenelement, welches im Raum-Zeit-Gebiet ein Prisma aufspannt, ist zur Abbildung von Sprüngen eine Anreicherung der Ansätze erforderlich. Mit Hilfe ausschließlich lokal definierter, zusätzlicher Freiwerte werden im angereicherten Gebiet, siehe Bild 5.9, auf der Basis des Partition-of-Unity-Konzeptes [7, 69] weitere Ansatzfunktionen gewählt. Die Ansatzfunktionen erfüllen die Bedingung, daß die Summe aller Ansätze in jedem Punkt des Elements 1 sein muß, und nutzen Annahmen über den zu erwartenden Lösungsverlauf. So erfolgt die Abbildung lokaler C^0 und C^1 -Unstetigkeiten durch die Wahl geeigneter angereicherter Ansatzfunktionen auf Basis der Signum-Funktion der Level-Set-Funktion, siehe [9].

Infolge des unstetigen Verlaufs innerhalb eines Elements führt die Integration der Modellgleichungen in schwacher Form (5.20) mit Hilfe der Gaußquadratur zu einer verminderten Konvergenz des Verfahrens. Deshalb erfolgt entlang der Nullisolinie der

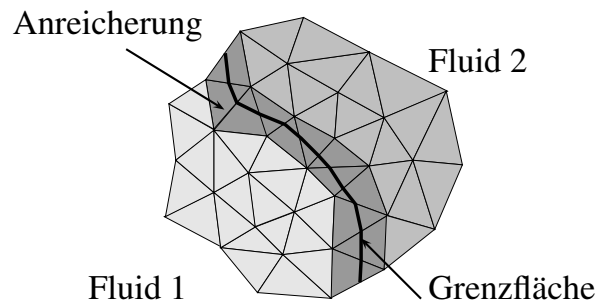


Bild 5.9: Lokale Anreicherung

Level-Set-Funktion eine Unterteilung der finiten Elemente in stückweise stetige Teilbereiche.

Die Entkopplung der Beschreibungsvariablen beiderseits der Unstetigkeitsstelle erfordert die Einbindung von Übergangsbedingungen entlang der Grenzfläche zur Abbildung eines definierten Sprungs. Analog der Kopplung zwischen Fluid und Struktur dienen die entlang der Grenzfläche eingeführten Oberflächenkräfte als Lagrange-Multiplikatoren der Geometriebedingung entsprechend (5.39) mit $\mathbf{v}^{F1} = \mathbf{v}^{F2}$. Die Übergangsbedingung der Spannung bedarf für die Mehrfluidmodellierung keiner Transformation der Koordinaten zwischen verschiedenen Betrachtungsweisen, da die Teilbereiche auf einem identischen Berechnungsgebiet definiert sind. Die Formulierung erlaubt die Berücksichtigung der Oberflächenspannung als vorgegebene C^0 -Unstetigkeit. Die Krümmung κ resultiert unmittelbar aus dem Verlauf der Nullisolinie der Level-Set-Funktion.

5.5 Lösungsalgorithmus

Die Modellgleichungen für die Beschreibung des granularen Materials der vorangehenden Abschnitte werden für die Berechnung des Entleerungsvorganges von Silos und anderer randgekoppelter Anfangswertaufgaben zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt, welches in schwacher Form in Gleichung (5.50) dargestellt ist.

Dabei stellen die Zeilen (5.50a – c) die schwache Form der Impulsbilanz (5.13) mit festen und flüssigen Spannungsanteilen des Materialmodells dar (4.10). Das Modell ist somit in der Lage beliebige Materialmodelle der unabhängigen Phasen einzubinden und im Gesamtsystem zu lösen. Die Bestimmung des Übergangsparameters ξ erfolgt innerhalb eines Iterationsschrittes und hängt von den betrachteten Zustandsgrößen \mathbf{v} und \mathbf{T} ab.

Zeile (d) stellt die schwache Form der Materialgleichung für den viskoplastischen Feststoffanteil des Granulars dar. Sie ist unterteilt in hydrostatische und deviatorische Anteile, so daß der Druck ebenfalls für die Beschreibung kompressibler Flüssigkeiten verwendbar ist. Aufgrund des linearen Zusammenhangs von Dichte und Druck entspricht

dieser Anteil der Massenbilanz, welche zusammen mit der Impulsbilanz für newtonsche Fluide die Navier-Stokes-Gleichung bildet.

Die Sprungterme in den Zeilen (e – g) stellen die Übergangsbedingung zwischen den diskontinuierlichen Zeitscheiben des Raum-Zeit-Gebietes dar. Die Zeilen (h) und (i) beinhalten die Rand- und Kopplungsbedingungen zur umgebenden Struktur, welche auf Dirichlet- und Neumannrand aufgebracht werden. Die letzte Zeile schließt dann die Stabilisierung der Impulsbilanz in das Gesamtgleichungssystem ein.

$$\int_Q \delta \mathbf{v} \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \right) dQ + \int_Q (\text{div } \delta \mathbf{v}) p dQ \quad (5.50a)$$

$$- \int_Q (\text{div } \delta \mathbf{v}) \xi \Phi_1 \mathbf{D} dQ + \int_Q (\text{div } \delta \mathbf{v}) (1 - \xi) \boldsymbol{\tau}^S dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{P^D} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dP^D + \int_Q \delta \mathbf{v} \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} dQ \quad (c)$$

$$+ \int_Q \delta p \cdot [K^{-1} \cdot \dot{p} - \mathbf{D}_{\text{vol}}] dQ + \int_Q \delta \boldsymbol{\tau}^S : [\underline{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\tau}}^S - (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{\text{vp}})] dQ \quad (d)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \varrho (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) d\Omega \quad (e)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta p(t_n^+) : K^{-1} : (p(t_n^+) - p(t_n^-)) d\Omega \quad (f)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \boldsymbol{\tau}^F(t_n^+) : \underline{\mathbf{C}}^{-1} : (\boldsymbol{\tau}^F(t_n^+) - \boldsymbol{\tau}^F(t_n^-)) d\Omega \quad (g)$$

$$+ \int_{P^N} \delta \mathbf{t}^F \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^{St}) \cdot \mathbf{n} dP^N \quad (h)$$

$$- \int_{P^N} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} dP + \int_{P^D} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) dP \quad (i)$$

$$+ \sum_e \int_{Q^e} \frac{1}{\varrho} \mathcal{L}(\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{T}) \kappa_{stab} (\mathcal{L}(\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{T}) - \varrho \bar{\mathbf{b}}) dQ = 0 \quad (k)$$

$$\forall \delta \mathbf{v}, \delta t^F, \delta p, \delta \boldsymbol{\tau}^F, \delta \mathbf{T}$$

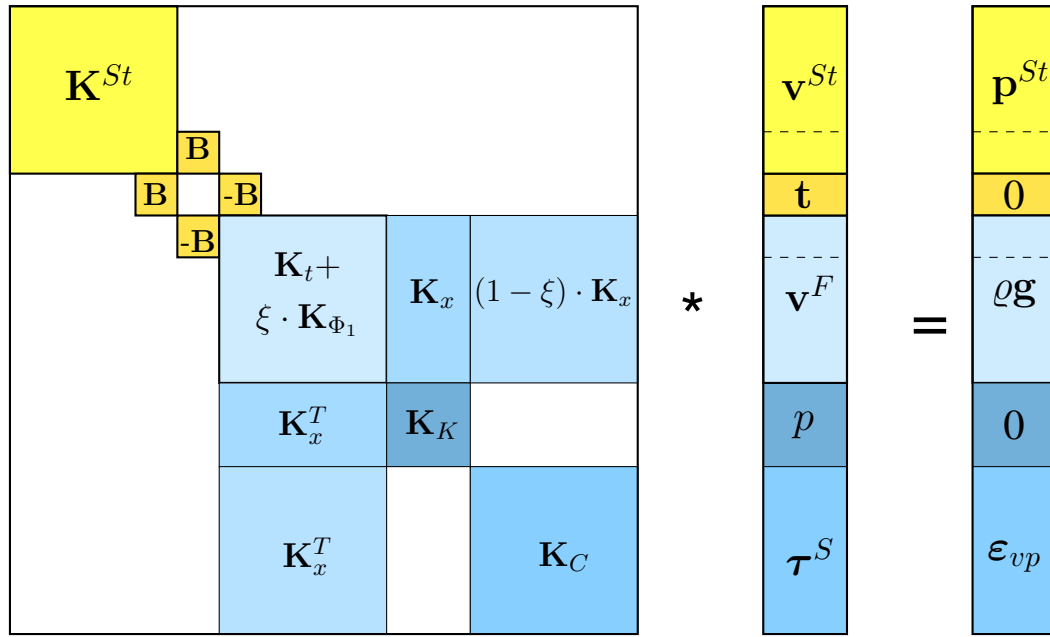


Bild 5.10: Gekoppeltes Gleichungssystem

Das dargestellte Gleichungssystem gilt zunächst nur für die Berechnung der Bewegung des granularen Materials. Für die Bestimmung des Entleerungsvorganges von Silos ist weiterhin die Beschreibung der Silostruktur und der Kopplungsbedingungen notwendig. Das gekoppelte Gleichungssystem ist in Bild 5.10 schematisch mit den Matrizen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{St} &= \int_A N_{,x}^T \cdot E \cdot N \, dA & \mathbf{B} &= \int_A N^T \cdot N \, dA \\
 \mathbf{K}_{\Phi_1} &= \Phi_1 \cdot \int_A N_{,x}^T \cdot N_{,x} \, dA & \mathbf{K}_t &= \int_A N^T \cdot N_{,t} \, dA \\
 \mathbf{K}_x &= \int_A N_{,x}^T \cdot N \, dA & \mathbf{K}_K &= \int_A N^T \cdot K^{-1} \cdot N_{,t} \, dA \\
 \mathbf{K}_C &= \int_A N^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot N_{,t} \, dA
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

dargestellt. Die monolithische Kopplung der Bestimmungsgleichungen für die Struktur (St) und das Granular, bestehend aus flüssigem (F) und festem (S) Anteil, erfolgt über die Nebenbedingung (5.38), welche keine Hauptdiagonaleinträge enthält und somit die Gleichheit der Geschwindigkeiten entlang des Kopplungsrandes erzwingt. Aus der Struktursteifigkeit \mathbf{K}^{St} und den Lasten \mathbf{p}^{St} folgen unmittelbar die Strukturgeschwindigkeiten, während die Beschreibung des granularen Materials eine weitere Kopplung zwischen den beiden auftretenden Phasen erfordert. Dabei wird die mit den Geschwindigkeiten \mathbf{v}^F gewichtete Impulsbilanz analog zu Hübner [47] mit den Strukturgleichungen gekoppelt. Das bestehende Modell wird im Rahmen dieser Arbeit um Kompressibilität und ein nichtlineares Materialmodell für den Feststoffanteil für das Granular ergänzt. Für inkompressibles Materialverhalten mit $K \rightarrow \infty$ reduziert sich die Massenbilanz auf $\text{div } \mathbf{v} = 0$ und die Kopplung zwischen den Feststoffspannungen $\boldsymbol{\tau}^S$ und den Geschwindigkeiten entfällt. Die Matrix \mathbf{C} beschreibt den elastischen Anteil des deviatorischen Materialverhaltens des Feststoffes, während die viskoplastischen

Verzerrungen ϵ_{vp} in den Lastvektor einfließen.

Das Gesamtgleichungssystem beinhaltet somit die Beschreibung der einzelnen Materialien, eine Randkopplung zwischen Struktur und Granular sowie die Kopplung zwischen fester und flüssiger Phase. Die Matrizen \mathbf{K}_K und \mathbf{K}_C dienen der Abbildung der Kompressibilität, während die globale Wichtung der Spannungsanteile mit dem Übergangsparameter ξ den Phasenübergang beschreibt.

Das so gewonnene Gleichungssystem für das granulare Material wird dann mit dem in Bild 5.11 dargestellten Iterationsschema gelöst. Das Lösungsschema ist vereinfachend ausschließlich für granulares Material dargestellt. Die Unterscheidung zwischen Struktur und Fluid, die Abgrenzung mit Hilfe der Level-Set-Funktion zur umgebenden Luft und reine Fließvorgänge ohne feste Materialbestandteile sind nicht abgebildet. Gesucht sind die Zustandsgrößen im Berechnungsgebiet für die Geschwindigkeit \mathbf{v}_i , die Spannungen \mathbf{T}_i und die Level-Set-Werte Φ_i aus den Größen im vorangehenden Zeitschritt \mathbf{v}_{i-1} , \mathbf{T}_{i-1} und Φ_{i-1} .

In jedem globalen Iterationsschritt k wird zunächst das Gleichungssystem zur Beschreibung der Physik aufgebaut, welches dem in Bild 5.10 abgebildeten Diagramm entspricht. Nachdem die Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K} für alle Elemente bestimmt sind, erfolgt der Einbau von Rand- und Zwangsbedingungen und die Lösung des Gleichungssystems sowie die Lösung der Level-Set-Gleichung.

Zur Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} eines dem granularen Material zugeordneten Elements erfolgt zunächst die knotenweise Bestimmung der Übergangsfunktion ξ . Die Bestimmung erfolgt iterativ, da die sich mit dem Neuberechneten ξ ergebende Spannung wiederum Einfluß auf den Phasenübergang besitzt. Im Anschluß werden die viskoplastischen Verzerrungsraten ϵ_{vp} ermittelt.

Die Matrizen \mathbf{K}_t , \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_{Φ_1} , \mathbf{K}_K und \mathbf{K}_C werden mittels Gaußpunktintegration bestimmt, wobei zunächst alle internen Variablen am Gaußpunkt ermittelt werden. Die raumzeitlichen Sprungterme sowie die Berücksichtigung räumlicher Diskontinuitäten vervollständigen das Gleichungssystem für das diskontinuierliche Galerkin-Finite-Element-Methode.

Schleife über alle Zeitscheiben I_n

$$\mathbf{v}_i^- = \mathbf{v}_{i-1}^+ \quad \mathbf{T}_i^- = \mathbf{T}_{i-1}^+ \quad \Phi_i^- = \Phi_{i-1}^+$$

Globale Iteration der Bestimmungsgleichungen für $k < k_{max}$

Schleife über alle Elemente zur Lösung der Physik Gl. (5.20)

- $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1}$, $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k-1}$, $\Phi_k = \Phi_{k-1}$
- Elementunterteilung für Anreicherung nach Abschnitt 5.4.2
- Stabilisierungsparameter κ_C in Elementmitte Gl. (5.29)

Schleife über alle Elementknoten für Übergangsfunktion $\hat{\xi}_k$

- $\boldsymbol{\tau}^F = \Phi_1(\varepsilon_{k-1}) \cdot \mathbf{D}_{k-1}$, $\boldsymbol{\tau}^S = \boldsymbol{\tau}_{k-1}^S$ (2.2)
- $\mathbf{T}_{ges} = \hat{\xi}_{k-1} \boldsymbol{\tau}^F + (1 - \hat{\xi}_{k-1}) \boldsymbol{\tau}^S$ Gl. (4.10)
- Iterative Bestimmung von $\hat{\xi}_k(\mathbf{D})$ und \mathbf{T}_{ges}

Schleife über alle Elementknoten für Verzerrungsraten $\dot{\varepsilon}_{vp}$

- Berücksichtigung des konvektiven Anteils der Zeitableitung nach Abschnitt 5.3.3

Schleife über alle Gaußpunkte in Raum und Zeit

- Bestimmung Level-Set-Wert Φ , Übergangsfunktion $\xi = N_i \cdot \hat{\xi}$
- Bestimmung Viskosität $\Phi_1(\mathbf{D}_{k-1})$ Gl. (2.14)
- Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ele} = (1 - \xi)\mathbf{K}^S + \xi\mathbf{K}^F$
- Aufbau Lastvektor $\varrho \cdot g$ und ε_{vp}
- Stabilisierung

- Addition des raumzeitlichen Sprungterms Gl. (5.26)
- Berücksichtigung räumlicher Diskontinuitäten Abschnitt 5.4.2

- Einbau von Rand- und Zwangsbedingungen, Einwirkungen und Interfaces
- Lösen des Gesamtgleichungssystems (5.50)
- Lösung Level-Set-Gleichung Gl. (5.48)
- Netzbewegung nach Abschnitt 5.4.1
- Konvergenzabfrage $\frac{|\Delta v|}{|v|} \leq \epsilon_{zul}$, $\frac{|\Delta p|}{|p|} \leq \epsilon_{zul}$, $\frac{|\Delta t|}{|t|} \leq \epsilon_{zul}$

Bild 5.11: Lösungsschema der Randwertaufgabe

6 Anwendungsbeispiele

Im folgenden Kapitel veranschaulichen zunächst einige Beispiele das in Kapitel 5 vorgestellte numerische Lösungsverfahren für die Modellierung eines Feststoffes in Eulerscher Betrachtungsweise. Anschließend folgt an einigen numerischen Strukturanalysen eine Validierung des entwickelten Materialmodells und eine Bewertung des Phasenübergangs. Die ermittelten Modellparameter und das numerische Verfahren finden schließlich Anwendung in der Simulation einer Hangrutschung, dem Vergleich mit experimentellen Ergebnissen und der Erweiterung auf komplexe Geometrien.

6.1 Stoßwellenausbreitung in einem Dehnstab

Das erste Beispiel stellt die Wellenausbreitung in einem Dehnstab dar, um das numerische Näherungsverfahren anhand analytisch ermittelter Lösungen zu überprüfen. Das dargestellte Wellenausbreitungsphänomen zeigt den Einfluß der verwendeten Konvektionsstabilisierung sowie die mögliche Modellierung viskoplastischen Materialverhaltens in Eulerscher Betrachtungsweise.

6.1.1 Elastischer Dehnstab

Zunächst folgt die Darstellung der Ergebnisse der Modellgleichungen (5.15) und (5.20) für einen linear-elastischen Dehnstab, um die Konvergenzeigenschaften des numerischen Verfahrens aufzuzeigen. Die Randbedingungen der verwendeten Scheibenelemente sind so gewählt, daß sie für eine Querdehnung von $\nu = 0$ eindimensionalen Dehnstabelementen entsprechen. Am linken Ende des in Bild 6.1 dargestellten Gebietes wird über den Zeitraum von $1 \cdot 10^{-3}$ s eine konstante Last p_x aufgebracht.

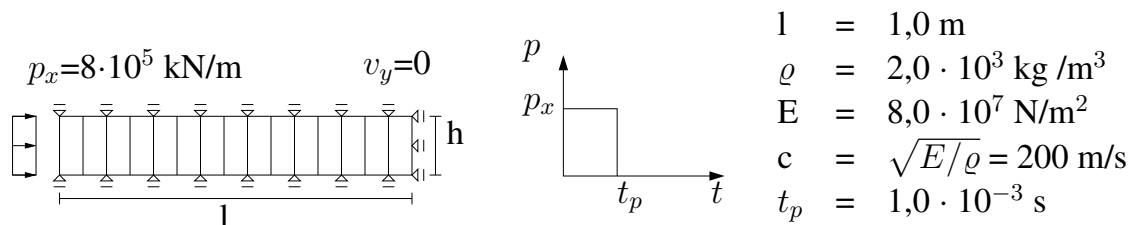


Bild 6.1: System und Materialwerte für die Wellenausbreitung im elastischen Stab

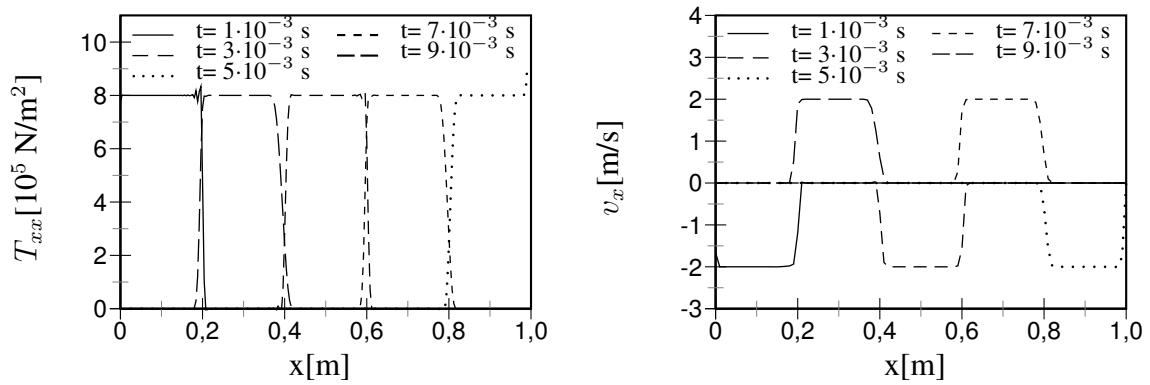


Bild 6.2: Wellenausbreitung im Dehnstab

Anschließend wandert die Druckwelle mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c

$$c = \sqrt{E/\rho} = 200 \text{ m/s} \quad (6.1)$$

durch den Dehnstab wie Bild 6.2 für eine Berechnung mit 500 Elementen und einer Zeitschrittweite von $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ zeigt. Insbesondere im rechten Diagramm, welches die Geschwindigkeitsverteilung im Dehnstab für verschiedene Zeitpunkte darstellt, wird deutlich, wie die Welle am rechten Rand reflektiert wird und unverändert zurückwandert. Die dargestellte Materialgeschwindigkeit folgt aus der Belastung des Dehnstabes zu $v_x = p_x \cdot c/E$.

Bild 6.3 zeigt die Verteilung der Längsspannung T_{xx} in horizontaler Richtung nach $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ für unterschiedliche Diskretisierungen bei einer Zeitschrittweite von $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ und einem Stabilisierungsfaktor $f_\tau = 1$, welcher den in (5.29) eingeführten Stabilisierungsparameter wichtet. Insbesondere für geringe Auflösungen mit weniger als 100 Elementen zeigt die Lösung große Oszillationen. Das rechte Diagramm stellt einen Ausschnitt des linken dar, um die unphysikalischen Lösungsverläufe zu verdeutlichen. Neben der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung ist der Lösungsver-

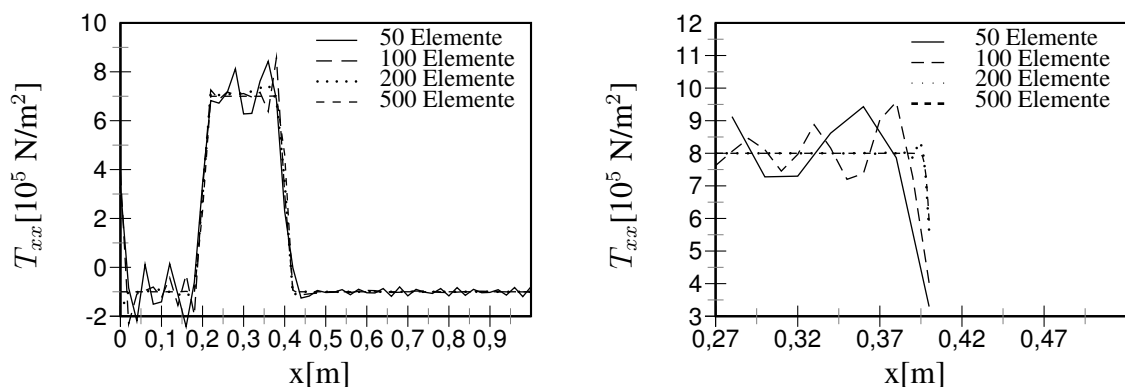


Bild 6.3: Spannungsverlauf zum Zeitpunkt $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ für verschiedene Auflösungen

lauf weiterhin von der Größe der verwendeten Stabilisierung abhängig. Bild 6.4 zeigt einen Ausschnitt der Spannungsverteilung zum Zeitpunkt $t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ für verschiedene

Stabilisierungsfaktoren f_τ . Eine sehr geringe Stabilisierung der Impulsbilanz führt für die Wellenausbreitung zu einem oszillierenden Lösungsverlauf, während eine zu große Stabilisierung das Ergebnis verfälscht. Die Galerkin/Least-Squares-Stabilisierung entspricht einer zusätzlichen Viskosität, welche in das System eingebracht wird. Daher bewirkt eine große Stabilisierung eine unphysikalische Diffusion, welche eine Verminderung des Druckgradienten zur Folge hat.

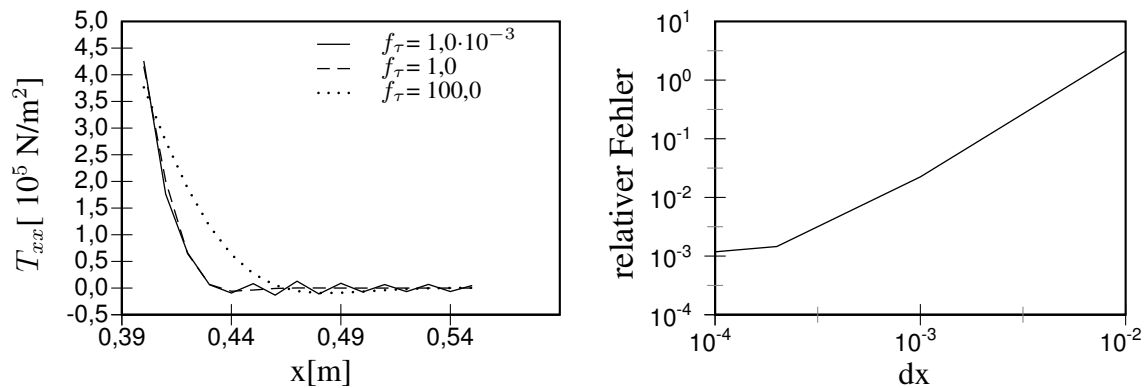


Bild 6.4: Konvergenz in Abhängigkeit von der Druckstabilisierung

Das rechte Diagramm in Bild 6.4 zeigt die räumliche Konvergenz der Lösung für einen Zeitschritt von $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ und für einen Stabilisierungsfaktor $f_\tau = 1$.

6.1.2 Viskoplastischer Dehnstab

Im Folgenden ersetzt ein viskoplastisches Material den elastischen Festkörper aus dem vorangegangenen Abschnitt. Zur Veranschaulichung des volumenkonstanten, viskoplastischen Fließens wird die Länge des Berechnungsgebiets auf 2,0 m erhöht.

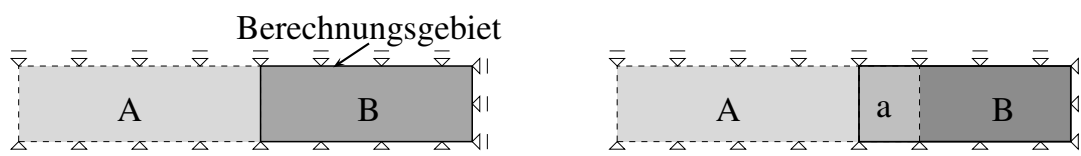


Bild 6.5: Betrachtetes Material im Berechnungsgebiet

Bild 6.5 zeigt die Verformung des langen Dehnstabs und das betrachtete Berechnungsgebiet. Das betrachtete Gebiet bleibt während der gesamten Berechnung aufgrund der Eulerschen Betrachtungsweise konstant. Anfangs befindet sich ausschließlich Material B innerhalb des betrachteten Gebiets und folgt den Bestimmungsgleichungen. Aufgrund der Belastung und einer Geschwindigkeit ungleich Null am Belastungsrand verformt sich der Dehnstab und neues Material, gekennzeichnet mit a, fließt in das Gebiet.

Dieses besitzt zunächst keine Verformungsgeschichte und erfährt erst innerhalb des Gebietes eine Verzerrung.

Bild 6.6 zeigt die Wellenausbreitung im betrachteten Gebiet für ein viskoplastisches Material mit einer Fließzahl $\bar{\gamma} = 10$ und der Fließspannung $T_f = 4,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Das linke Bild stellt die Wellenausbreitung unter Berücksichtigung plastischen Fließens dar. Es ist ersichtlich, daß die Hauptnormalspannung des Materials gegen den Wert T_f konvergiert, da die Randbedingungen kein Fließen orthogonal zur Stablängsachse erlauben. Der Wert der Spannung an der Wellenfront ist stets geringer als am Ende der Druckwelle, da das dort befindliche Material bereits mehr Zeit zum plastischen Fließen hatte. Weiterhin steigt die Spannung im Nachlauf der Druckwelle an, wenn das plastische Fließen in alle Richtungen erfolgt. Vor der Druckwelle ist keine signifikante Spannungsänderung zu beobachten, da die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit des Fließens übersteigt. Nach dem Erreichen der Fließspannung bewegt sich das Material mit konstanter Geschwindigkeit weiter und erreicht nach $10 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ den eingespannten Rand. Dort wird die Druckwelle reflektiert, so daß die Spannung bis

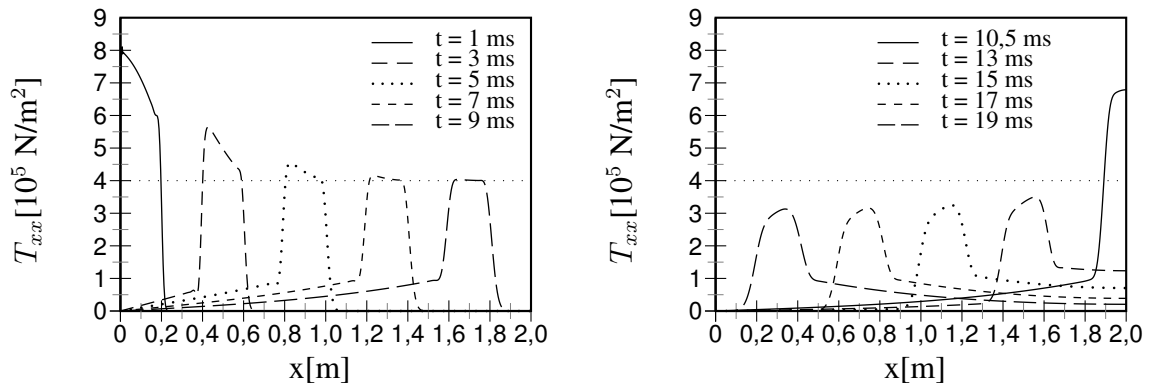


Bild 6.6: Wellenausbreitung in einem viskoplastischen Dehnstab

zum Doppelten des ursprünglichen Wertes steigt. Deshalb beginnt in diesem Bereich das Material erneut zu fließen und die zurücklaufende Welle erreicht nach der Reflexion einen niedrigeren Wert, wie im rechten Bild dargestellt ist. Die weitere Bewegung erfolgt wie in einem elastischen Festkörper, da die Spannung nun unter der Fließspannung T_f liegt.

6.1.3 Dehnstab mit zwei Materialien

Das Beispiel eines elastischen Dehnstabes mit einem Wechsel im Material bei $x = 0,5 \text{ m}$ ist in Bild 6.7 dargestellt. Das Gebiet ist in 2000 regelmäßige Dreieckselemente unterteilt und die Zuweisung der Materialwerte erfolgt mit Hilfe der Level-Set-Methode. Die Belastung p_x erfolgt am linken Stabende über einen Zeitraum von $t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Die Druckwelle erreicht mit der Wellengeschwindigkeit $c_1 = 200 \text{ m/s}$ in Gebiet I nach $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

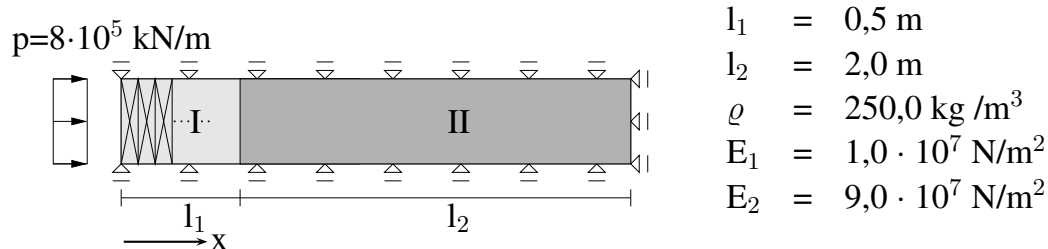


Bild 6.7: Abmessungen und Materialeigenschaften des Dehnstabes

die Grenzfläche, an der teilweise eine Reflexion und zum Teil eine weitere Ausbreitung in Gebiet II erfolgt. Die Aufteilung der Druckwelle in die beiden resultierenden Wellen

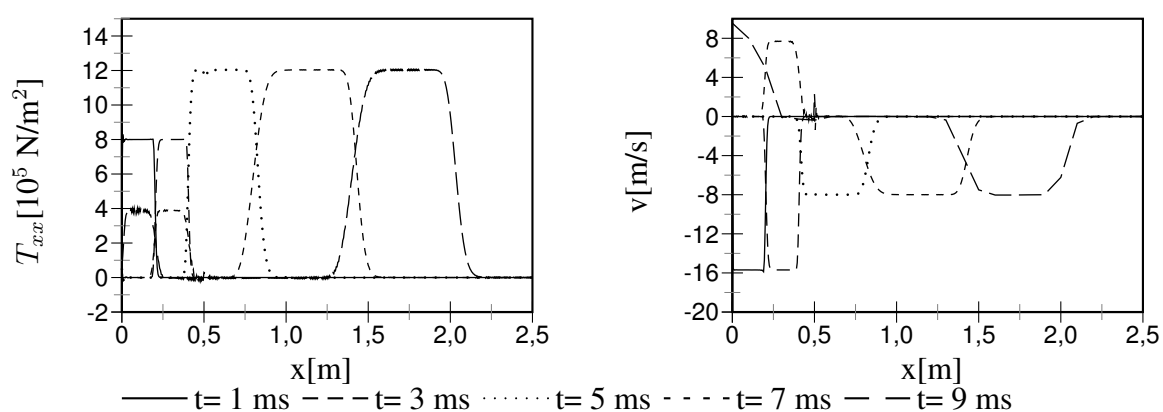


Bild 6.8: Wellenausbreitung im elastischen Dehnstab mit zwei Materialien

folgt aus den materialspezifischen Modellparametern und den Übergangsbedingungen, welche für $x = l_1$

$$v^I + v_{refl}^I = v^{II} \quad (6.2)$$

für die Geometriebedingung und

$$T_{xx}^I + T_{xxrefl}^I = T_{xx}^{II} \quad (6.3)$$

für die Erfüllung der Impulsbilanz lauten. Die in Bild 6.8 dargestellte zeitliche Entwicklung der Materialspannung T_{xx} und der zugehörigen Materialgeschwindigkeit v_x zeigen zunächst die Wellenausbreitung bis zum Erreichen der Grenzfläche. Aufgrund des höheren Elastizitätsmoduls in Gebiet II erfolgt die Wellenausbreitung im rechten Teilgebiet schneller und die Wellenlänge steigt proportional. Die reflektierte Welle in Gebiet I besitzt die gleiche Wellenlänge wie die aufgebrachte Belastung. Die Materialbewegung erfolgt entgegen der positiven x-Achse. Die Materialgeschwindigkeit wird daher in den Diagrammen negativ dargestellt. Der verwendete Korrekturfaktor für die Konvektionsstabilisierung von $f_\tau = 1,0 \cdot 10^{-3}$ führt insbesondere für große Ausbreitungsgeschwindigkeiten zu einer diffusen Ausbreitung der Welle. Im Bereich der Grenzfläche und des

Einströmrandes treten infolge der erzwungenen Spannungs- und Geschwindigkeitsgradienten Oszillationen auf. Eine Vergrößerung der Konvektionsstabilisierung vermindert diese auftretenden Oszillationen, vergrößert jedoch die Diffusion.

Das Beispiel zeigt, daß eine Unterteilung des Berechnungsgebietes in Bereiche mit unterschiedlichen Materialeigenschaften mit Hilfe der verwendeten numerischen Methoden möglich ist und daß die Übergangsbedingungen entlang der Grenzfläche erfüllt werden.

6.2 Reibungseinflüsse in quasi-statischem Schüttkegel

Das folgende Beispiel zeigt die Begrenztheit einer reinen Fluidformulierung und die Vorteile des vorgestellten Mehrphasenmaterialmodells. Neben der Darstellung des schnellen Fließens granularer Materialien ist die Beschreibung des quasi-statischen Zustandes von Bedeutung. Hierzu wird exemplarisch ein Schüttkegel betrachtet. Aufgrund des ebenen Berechnungsgebietes und unter Berücksichtigung der Symmetrie erfolgt ausschließlich die Berechnung des linken Abschnittes des in Bild 6.9 dargestellten Systems. Das graumarkierte Granular wird zunächst als Bingham'sche Flüssigkeit model-

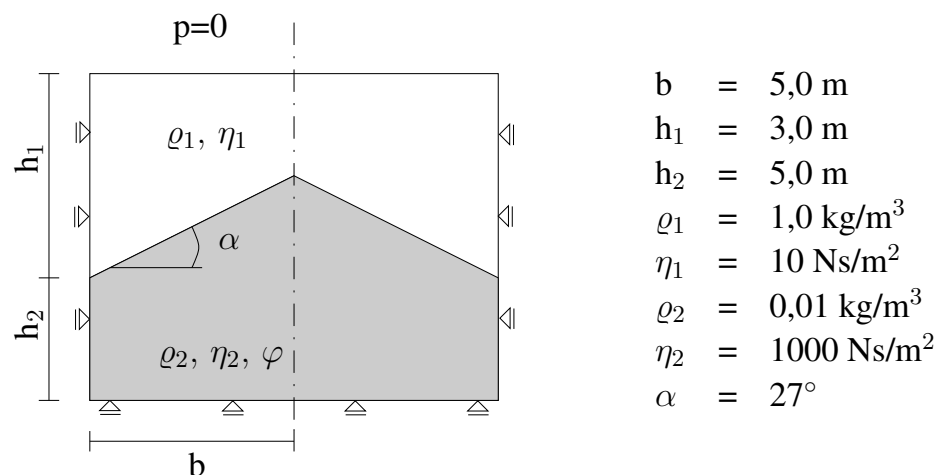


Bild 6.9: Systemskizze

liert, um erste Aussagen über das Spannungs- und Deformationsverhalten zu erhalten. Anschließend folgt eine Berechnung mit dem in Kapitel 4 vorgestellten Mehrphasenmodell. Sowohl das graumarkierte Granular als auch die darüberbefindliche Luft werden als Bingham'sche Flüssigkeiten modelliert, um eine einheitliche numerische Behandlung zu ermöglichen. Die Diskretisierung erfolgt mit 2880 regelmäßig angeordneten Dreieckelementen. Die Unterscheidung zwischen den Gebieten der beiden Phasen erfolgt mit der Zuweisung der Modellparameter anhand des Vorzeichens der Level-Set-Funktion. Die Werte der skalaren Level-Set-Funktion entsprechen zu Beginn der Berechnung dem senkrechten Abstand auf die vorgegebene Oberfläche. Eine Verwen-

derung der vertikalen Abstände als Anfangswerte führt ebenfalls auf gute Ergebnisse, kann jedoch bei ungenügender Diskretisierung zu kleinen Abweichungen führen. Für die weiteren Beispiele ist die Anfangshangneigung α stets 27° . Dieser Wert ermöglicht die Untersuchung des Ruhezustandes für realitätsnahe Reibungswinkel.

6.2.1 Fließverhalten mit reiner Fluidformulierung

Zur Untersuchung des Einflusses der inneren Reibung auf die Spannung und somit das Fließverhalten des granularen Materials wird zur Vereinfachung eine Bingham'sche Flüssigkeit betrachtet. Die verwendeten Modellparameter, welche in Bild 6.9 aufgelistet sind, entsprechen in ihrer Größenordnung den Werten von Luft und granularem Material. Die für die Bewegung des Granulats unwesentliche Luft erhält Materialkennwerte, welche den Widerstand begrenzen und keine zusätzliche Stabilisierung der Modellgleichung erfordern. Die Viskosität der Luft resultiert aus einem für beide Phasen konstanten Verhältnis von Dichte zu Viskosität, wodurch eine einheitliche Stabilisierung der Berechnungsgebiete erfolgen kann. Somit bestimmt das Granular vorrangig das Strömungsverhalten des Gesamtsystems. Die Dichte ϱ_1 entspricht der Dichte von Wasser, da das Verhalten granularen Materials zunächst nur näherungsweise beschrieben werden soll. Dem granularen Material wird neben Dichte und Viskosität ein variabler Reibungswinkel φ und ein zugehöriger Regularisierungsparameter ϵ zugewiesen.

Zunächst variiert der Reibungswinkel von 10° bis 40° bei einem konstanten Regularisierungsparameter von $\epsilon = 10^{-8}$. Die Lage der Oberfläche nach 10 s bei einer Zeitschrittweite von 0,01 s ist in Bild 6.10 dargestellt. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich das System in einem nahezu stationären Zustand. Es ist zu erkennen, daß die mittlere

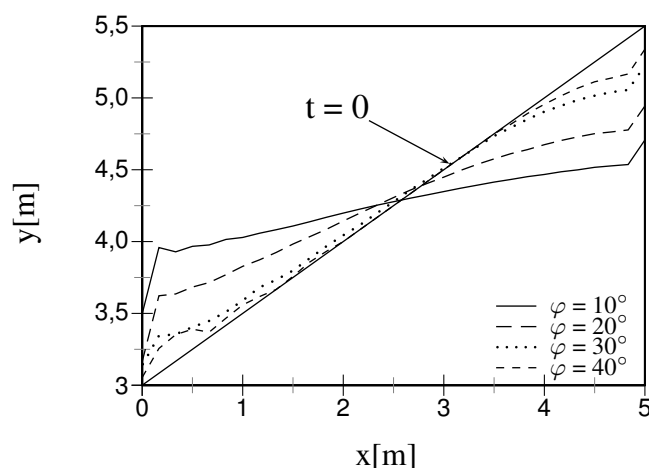


Bild 6.10: Lage der Oberfläche nach $t = 10$ s für verschiedene Reibungswinkel

re Neigung der Oberfläche unmittelbar vom gewählten Reibungswinkel abhängt. Außerdem ist bereits ersichtlich, daß auch für $\varphi > \alpha$ eine Bewegung aus der anfängli-

chen Ruhelage erfolgt, obwohl das granulare Material unter statischen Bedingungen nicht abrutschen kann. Die zeitliche Veränderung des mittleren Hangneigungswinkels für verschiedene Reibungswinkel wird in Bild 6.11 dargestellt. Für ein rein laminares Fluid mit $\varphi = 0$ fließt das Material in die ebene Gleichgewichtslage, wo es aufgrund viskoser Dämpfung η_2 zur Ruhe kommt. Die Viskosität ist über den gesamten Zeitraum konstant.

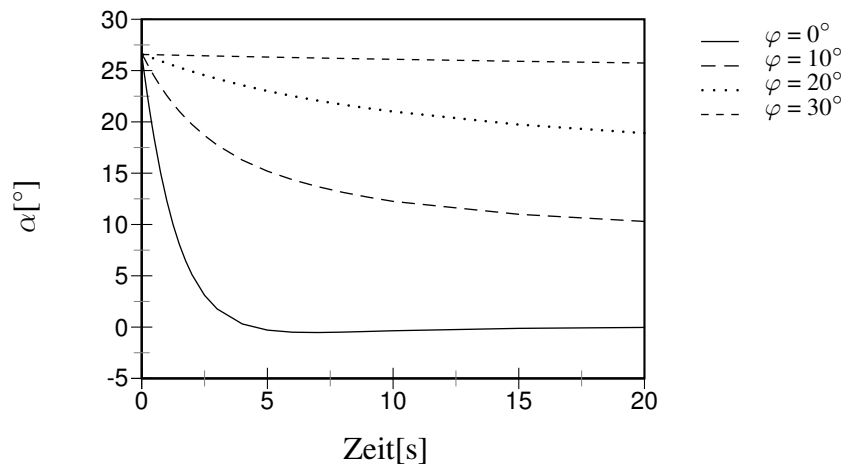


Bild 6.11: Mittlerer Hangneigungswinkel

Reibungsbehaftete Fluide haben eine ratenabhängige Viskosität. Für innere Reibungswinkel, welche kleiner sind als die Anfangsneigung, sind zunächst die inneren Scherkräfte geringer als für den Gleichgewichtszustand erforderlich. Das Material beginnt zu fließen. Zunächst beherrschen die Ungleichgewichtskräfte das Fließverhalten und der Neigungswinkel des Hanges nähert sich schnell dem inneren Reibungswinkel. Bei Erreichen dieser Lage beendet das Material in der Realität die Bewegung, fließt in der Simulation jedoch weiter. Die Bewegung setzt sich unbegrenzt fort, wenn die Scherspannung aufgrund der Ratenformulierung mit einer endlichen Viskosität nie den Gleichgewichtszustand erfüllen kann. Selbst für nahezu verschwindende Scherraten ist eine Bewegung möglich, wenn die Viskosität den Wert

$$\Phi_1 = \frac{T_f}{\epsilon} \quad (6.4)$$

annimmt. Die endliche Viskosität Φ_1 bewirkt weiterhin eine Bewegung des granularen Materials für Reibungswinkel $\varphi > \alpha$. Trotz des möglichen Gleichgewichtszustandes in der Ausgangslage mit Scherkräften, welche unterhalb der Fließgrenze T_f liegen, beginnt das Material zu fließen. Mit der auftretenden Geschwindigkeit vermindert sich wiederum die Viskosität und der Hang rutscht langsam ab.

Der Beginn der Bewegung wird weiterhin von den Anfangsbedingungen und der Diskretisierung beeinflusst. Ohne Vorgabe eines anfänglichen Druckfeldes, verhält sich das Material im ersten Berechnungsschritt wie eine newtonsche Flüssigkeit, da $T_f =$

$p \cdot \sin \varphi = 0$. Aufgrund der daraus folgenden Geschwindigkeit ist kein Gleichgewicht möglich. Weiterhin führt eine große Zeitschrittweite zu einer Verstärkung des Einflusses des ersten Berechnungsschrittes und somit zu einer Vergrößerung der Schergeschwindigkeit. Besondere Bedeutung besitzt der Regularisierungsparameter, der die Viskosität auf einen endlichen Wert beschränkt.

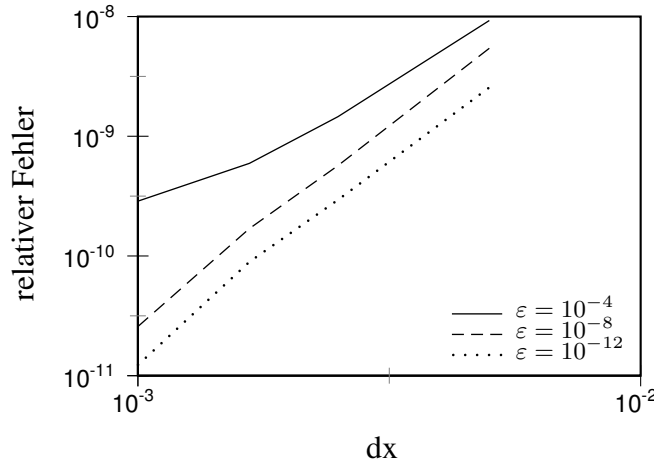


Bild 6.12: Räumliche Konvergenz und Einfluß ε für $\varphi = 40^\circ$

Bild 6.12 zeigt das Konvergenzverhalten bei Veränderung der räumlichen Auflösung für verschiedene Parameter ϵ . Der relative Fehler folgt aus der integrierten Differenz der berechneten Oberflächenlage $y_{num}(x)$ und der Ausgangslage $y_{ref}(x)$ zu

$$\text{rel. Fehler} = \frac{\int_0^b (y_{num}(x) - y_{ref}(x))^2 dx}{\int_0^b (y_{ref}(x))^2 dx}. \quad (6.5)$$

Für Materialien mit einem Reibungswinkel von $\varphi = 40^\circ$ ist die Ausgangslage identisch mit der exakten Position zu allen Zeitpunkten, da keine Bewegung auftreten sollte. Bild 6.12 verdeutlicht, daß das Verfahren unabhängig von der Größe des Parameters gute Konvergenzeigenschaften besitzt. Andererseits steigt der Fehler bei einer Vergrößerung der Regularisierung von $\epsilon = 10^{-8}$ auf $\epsilon = 10^{-4}$ um eine Größenordnung. Eine weitere Verkleinerung des Regularisierungsparameters führt jedoch nur zu einer geringfügigen Verbesserung der Ergebnisse, da die Ersatzviskosität Φ_1 die Größenordnung der Rechnergenauigkeit erreicht.

Die numerisch instabile Simulation des Ruhezustandes des granularen Materials stellt die größte Einschränkung der vorgestellten Modellierung als Fluid dar. Daher wird in dieser Arbeit der nachfolgende, erweiterte Ansatz verwendet.

6.2.2 Verwendung des Materialmodells mit Phasenübergang

Die Verwendung einer gemischten Formulierung ermöglicht die Simulation des statischen Ruhezustandes ebenso wie der Fließbewegung, welche bei Überschreitung des maximalen Hangneigungswinkels auftritt. Neben den bereits im vorangegangenen Abschnitt verwendeten Parametern werden die dem Feststoffmodell zugeordneten Werte $E = 960 \text{ MN/m}^2$ und $\gamma = 10^{-5}$ gesetzt. Die Wahl des Elastizitätsmoduls erfolgt aufgrund der sonst beginnenden Setzung und der daraus resultierenden Oberflächenverschiebung, welche Vergleiche zwischen verschiedenen Modellparametern verhindert. Zu Beginn der Simulation befindet sich das Material im Gleichgewicht, und die Scherspannungen folgen aus dem Hangneigungswinkel, so daß die Übergangsfunktion ξ aus Gleichung (4.12) den Wert Null annimmt. Der Verlauf der Spannungstrajektorien sowie die Lage der Oberfläche und die Größe des hydrostatischen Drucks sind in Bild 6.13 dargestellt.

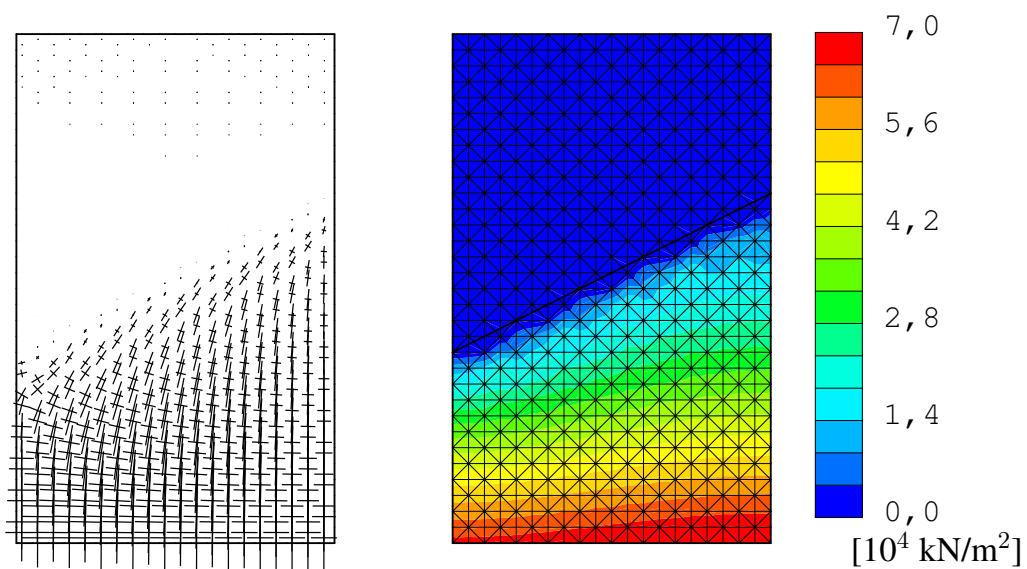


Bild 6.13: Spannungstrajektorien und Druck zu Beginn der Berechnung

Bild 6.14 zeigt den zeitlichen Verlauf des mittleren Oberflächenwinkels α für verschiedene Haftreibungswinkel φ_h und die zugehörigen Lagen der Oberfläche zum Zeitpunkt $t = 3 \text{ s}$. Für einen dem Feststoffverhalten zugeordneten Reibungswinkel, welcher größer als die anfängliche Hangneigung ist, bleibt das granulare Material im statischen Gleichgewicht. Somit bleibt der Winkel α konstant. Für kleinere Reibungswinkel beginnt das Material zunächst zu fließen und der Hangneigungswinkel verringert sich langsam. Nach Erreichen eines Zustandes, der durch $\xi = 1,0$ im gesamten Gebiet gekennzeichnet ist, folgt eine schnelle Bewegung.

Die Verteilung des Übergangskoeffizienten ξ in Bild 6.15 verdeutlicht die zeitliche Ent-

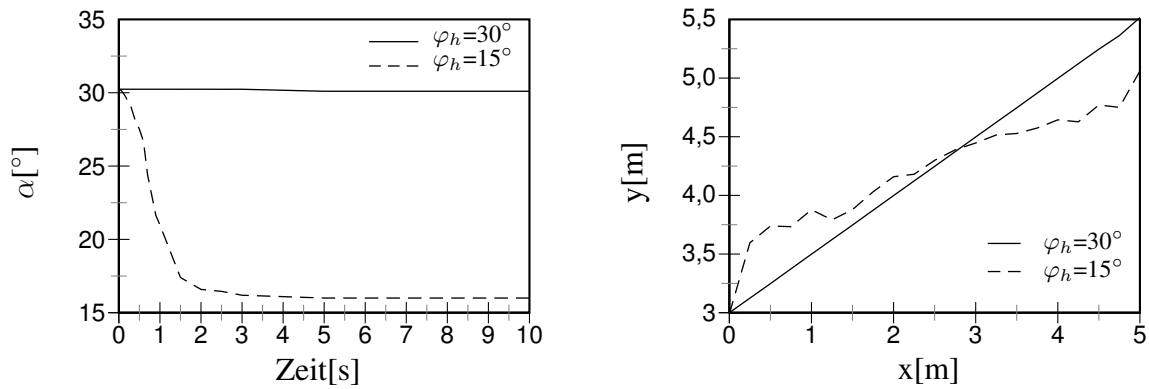


Bild 6.14: Lage der Oberfläche nach $t=0,5$ s für verschiedene Reibungswinkel

wicklung des Fließens und das Erreichen der Ruhelage für $\varphi_h = 15^\circ$. Zunächst ist das Material fest und fließt dann vollständig. Lediglich in der der Strömung abgewandten Ecke unterschreitet die Scherspannung das Fließkriterium und das Materialverhalten folgt dem Feststoffmodell. Nachdem die mittlere Oberflächenneigung die Größe des inneren Reibungswinkels erreicht hat, verringert sich die Geschwindigkeit und das Ma-

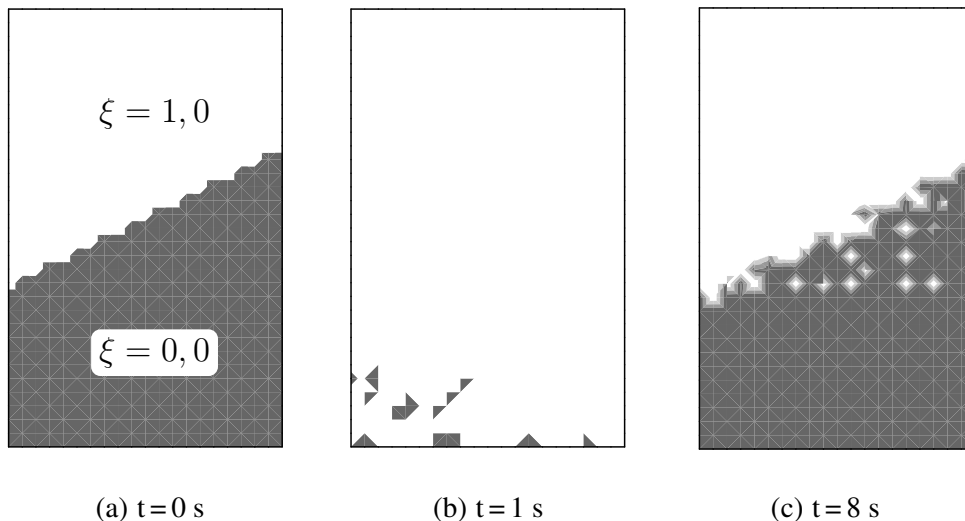


Bild 6.15: Verteilung der Übergangsfunktion ξ zu verschiedenen Zeitpunkten

terial erreicht das statische Gleichgewicht. Infolgedessen fällt der Übergangskoeffizient nach einer Zeit von $t = 3$ s ab und ausschließlich das Material unmittelbar an der Oberfläche fließt noch etwas, siehe Bild 6.15(c). In Bild 6.15 sind lediglich Werte für den Übergangskoeffizienten ξ von 0,0 und 0,1 dargestellt, da der Phasenübergang sehr schnell stattfindet und somit nur in wenigen Zeitschritten sowohl feste als auch flüssige Materialeigenschaften auftreten.

Insbesondere die Möglichkeit der Modellierung des statischen Gleichgewichts mit endlichen Scherkräften stellt einen wesentlichen Vorteil der gemischten Materialformulie-

rung gegenüber der reinen Fluidformulierung dar. Die freie Bewegung der Oberfläche und die stationäre Lösung nach etwa 3 s zeigt weiterhin die Fähigkeit des Modells, feste und flüssige Zustände sowie deren Übergang abzubilden.

6.3 Hangrutschung

Aufgrund des großen Gefahrenpotentials von Hangrutschungen und Lawinen sind Voraussagen über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens sowie die Masse und Geschwindigkeit des fließenden Materials erwünscht. Einige Autoren [77, 84] behandeln das Granular als Flüssigkeit, da große Entfernungen mit hoher Geschwindigkeit zurückgelegt werden. Hierfür existiert eine große Anzahl experimenteller Ergebnisse [3, 23, 49]. Das Mehrphasenmodell erlaubt zusätzlich die Bestimmung der inneren Kräfte und des Geschwindigkeitsprofils sowie die Darstellung des ruhenden Materials.

6.3.1 Anpassung der Modellparameter an experimentelle Ergebnisse

Im Folgenden zeigt die Simulation einer Hangrutschung auf einer rauhen Ebene die Fähigkeit des vorgestellten Modells, Versuchsergebnisse abzubilden. Sowohl Darstellungsweise als auch Ergebnisse sind dem Artikel von Savage [84] entnommen, welcher auf Huber [40] Bezug nimmt und das tiefengemittelte Savage-Hutter-Modell verwendet.

Zu Beginn des Experiments steht das granulare Material hinter einer Absperrung in Ruhe auf der um 32° geneigten, rauhen Ebene. Zum Zeitpunkt $t=0$ wird die Absperrung entfernt, und das Material beginnt sich zu bewegen. Der Versuchsaufbau wird mit Hilfe der in (5.9) und (5.13) dargestellten Modellgleichungen unter Verwendung des Materialmodells (4.10) für das in Bild 6.16 dargestellte Berechnungsgebiet simuliert. Das Finite-Elemente-Netz ist in 7919 regelmäßige Dreieckselemente unterteilt. Die hohe Auflösung erlaubt die Abbildung dünner Schichten granularen Materials, wie sie im Verlauf der Hangrutschung auftreten. Die Abgrenzung des Granulars von der umgebenden Luft erfolgt mit der Level-Set-Methode. Die Lage des granularen Materials zu Beginn der Berechnung ist grau dargestellt.

Die luftbegrenzten Ränder sind frei, so daß sich die Luft ungehindert bewegen kann und die Bewegung des Granulars nicht beeinflußt. Die Bodenreibung zwischen Granular und rauhem Untergrund wird mittels eines reibungsbehafteten Kopplungselementes zwischen Fluidgebiet und einer darunterbefindlichen Struktur entsprechend Abschnitt 5.4.1 simuliert. Eine direkte Kopplung zwischen den Normal- und Scherspannungen als Zwangsbedingung ist aufgrund der Formulierung ohne Scherspannungsfreiwerte nicht möglich.

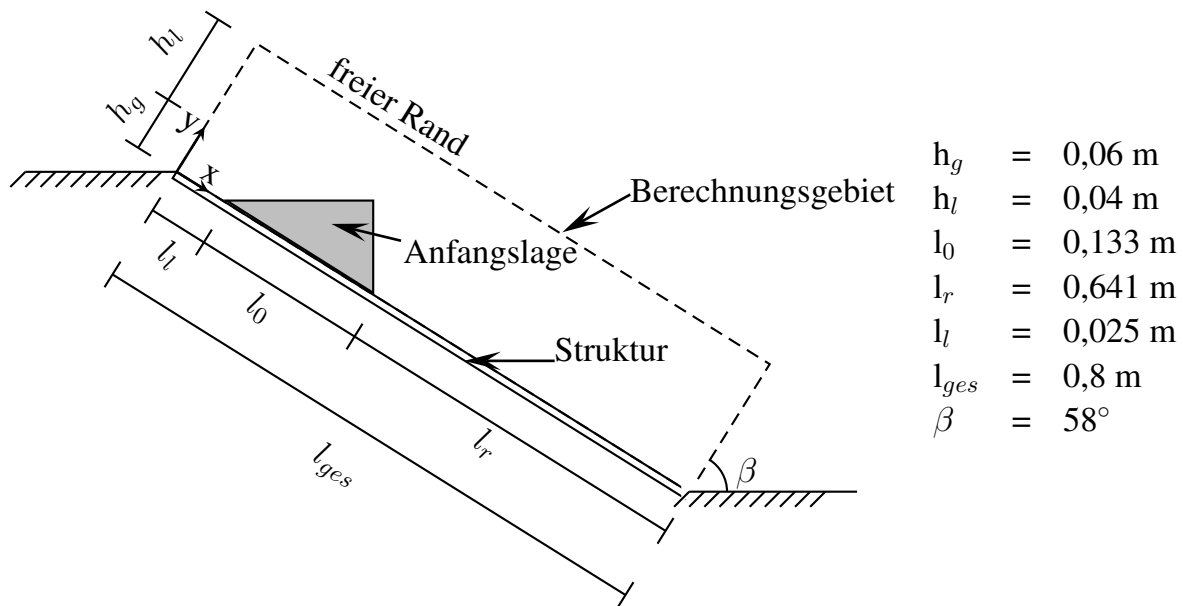


Bild 6.16: Systemskizze der Hangrutschung

Die Ausbreitung des Materials erfolgt im Experiment sehr schnell. Nach 0,4 s hat sich eine dünne, lange Schicht von 1-2 Korndurchmessern Dicke gebildet, welche sich nahezu unverändert fortbewegt. Bildaufnahmen, welche im Abstand von 0,12 s entstehen, zeigen die Form und Lage des Material. Bild 6.17 zeigt die Ergebnisse der Berechnung mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,2 \text{ ms}$, einem Reibungswinkel $\varphi_h = \varphi_g = 30^\circ$ und einem Reibungsbeiwert zwischen Untergrund und Fluid von $\mu = 0,3$. Zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ weist das granulare Material eine hohe Hangneigung auf, welche sich im weiteren vermindert. Das Material breitet sich wie im Experiment aus, da die Lawinenfront eine größere Geschwindigkeit aufweist als die Rückseite. Die Rückseite, welche anfangs eine geringer Hangneigung aufweist, ist aufgrund der zunächst geringeren Schichtdicke stärker durch die Bodenreibung beeinflusst. Die Simulation erfolgt nur bis zum Zeitpunkt $t = 0,4 \text{ s}$, da anschließend aufgrund der geringen Schichtdicke kein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen möglich ist.

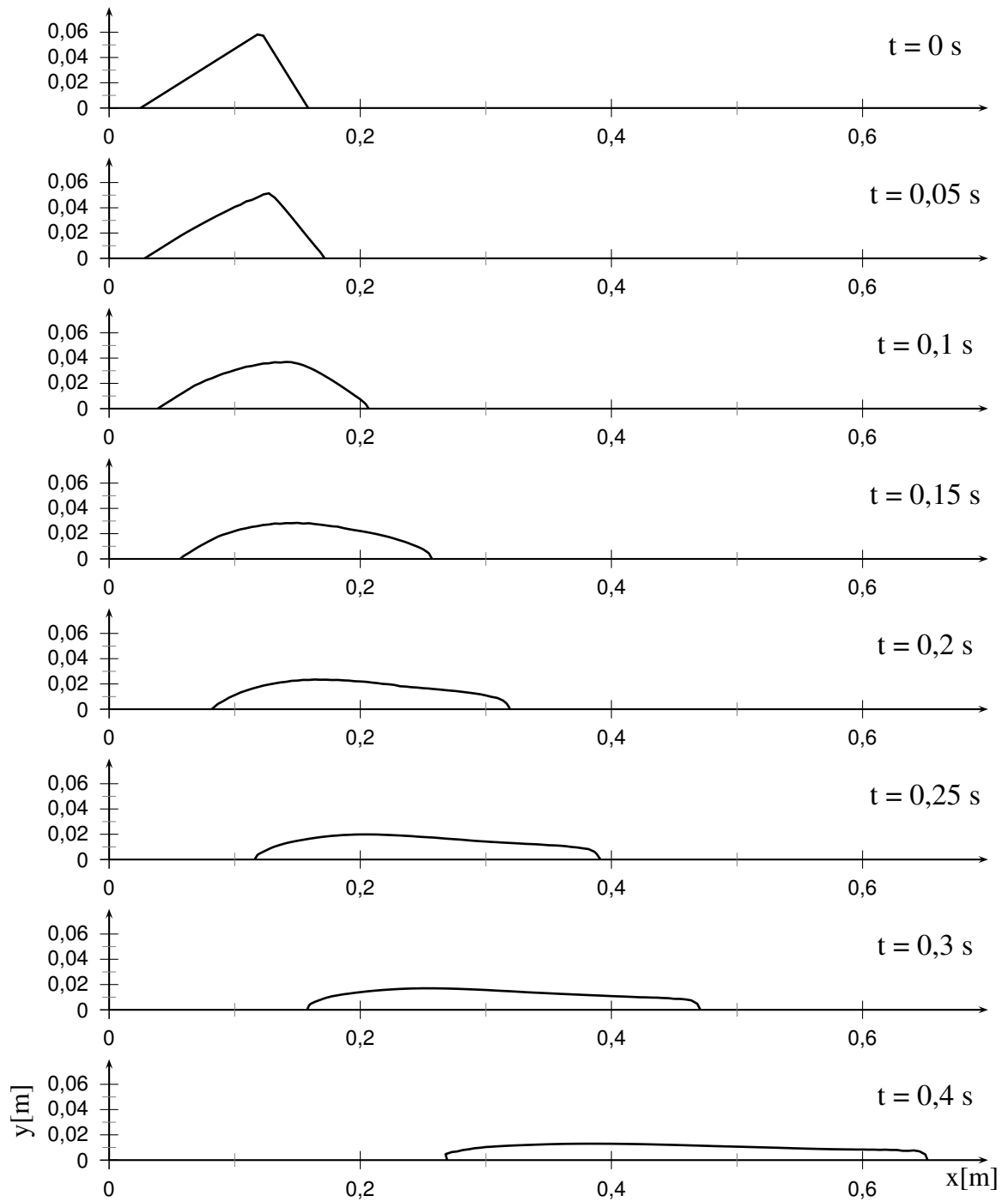


Bild 6.17: Bewegung des Granulars an einem Hang

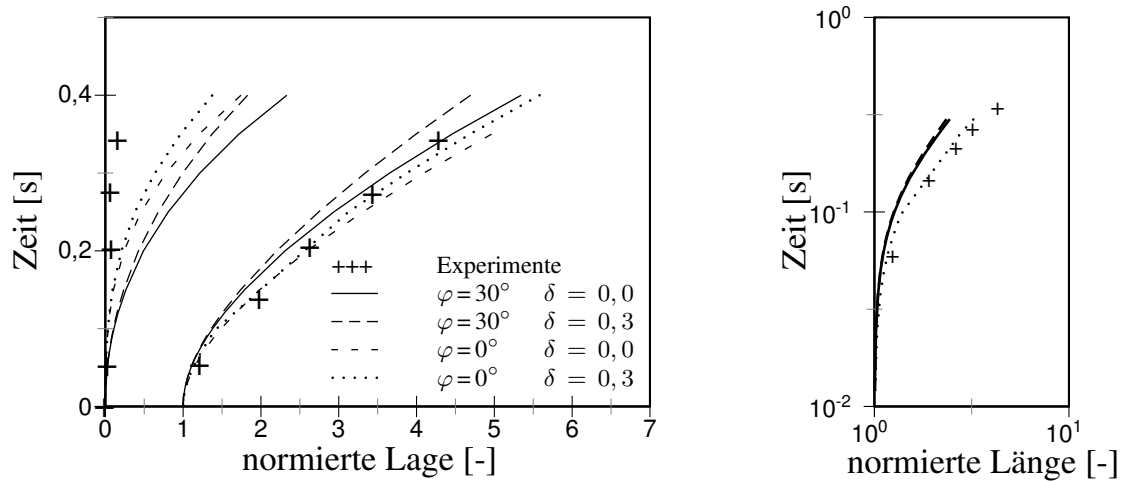


Bild 6.18: Dimensionslose Lage und Länge des Materials

Bild 6.18 faßt die Ergebnisse für verschiedene Modellparameter zusammen. Das linke Bild zeigt die zeitliche Entwicklung der Lawinenfront und der Lawinenrückseite im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen. Die Lage ist hierbei analog zu [84] mit der Ausgangslänge l_0 normiert. Die Ergebnisse für die Lawinenfront zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, während die Rückseite des Materials eine zu hohe Geschwindigkeit aufweist. Die Abweichung folgt aus dem zu geringen Einfluß der Bodenreibung für die gewählte Diskretisierung und dem geschwindigkeitsabhängigen Reibungsbeiwert aus Gleichung (5.44). Desweiteren ist die zeitlich veränderliche Lage der Rückseite kaum mit experimentellen Ergebnissen vergleichbar, da keine exakte Definition der zusammenhängenden Hangrutschung existiert. Im Versuch verursachen aufgrund der Haftreibung liegenbleibende Einzelkörner entlang der gesamten Länge einen konstanten Anfangspunkt der Lawine. Weiterhin weist die numerische Lösung keine unphysikalischen Verläufe mit hangaufwärtsgerichteter Geschwindigkeit auf, wie Savage sie für eine Beschreibung in Eulerscher Betrachtungsweise findet.

Das Bild 6.18 verdeutlicht weiterhin den Einfluß der inneren Reibung φ und der Bodenreibung δ auf das Fließprofil. Die Lawinenspitze bewegt sich schneller für geringe Reibungsbeiwerte, wobei die innere Reibung einen größeren Einfluß aufweist. Das rechte Diagramm in Bild 6.18 zeigt die Länge der Lawine über die Zeit in doppelt-logarithmischer Darstellung. Das Bild verdeutlicht den schnellen Anstieg der Länge zu Beginn des Fließvorgangs und die asymptotische Entwicklung im weiteren Verlauf.

6.3.2 Umströmung eines Hindernisses

Nach der Validierung des Modells anhand von Versuchssimulationen folgt die Berechnung komplexer Geometrien. Die Vergrößerung des Berechnungsgebietes, siehe Bild 6.19, und die Einbindung eines Hindernisses erlauben die Untersuchung des Einflusses der Untergrundgeometrie auf das Fließverhalten. Ebenso wie der ebene, raue

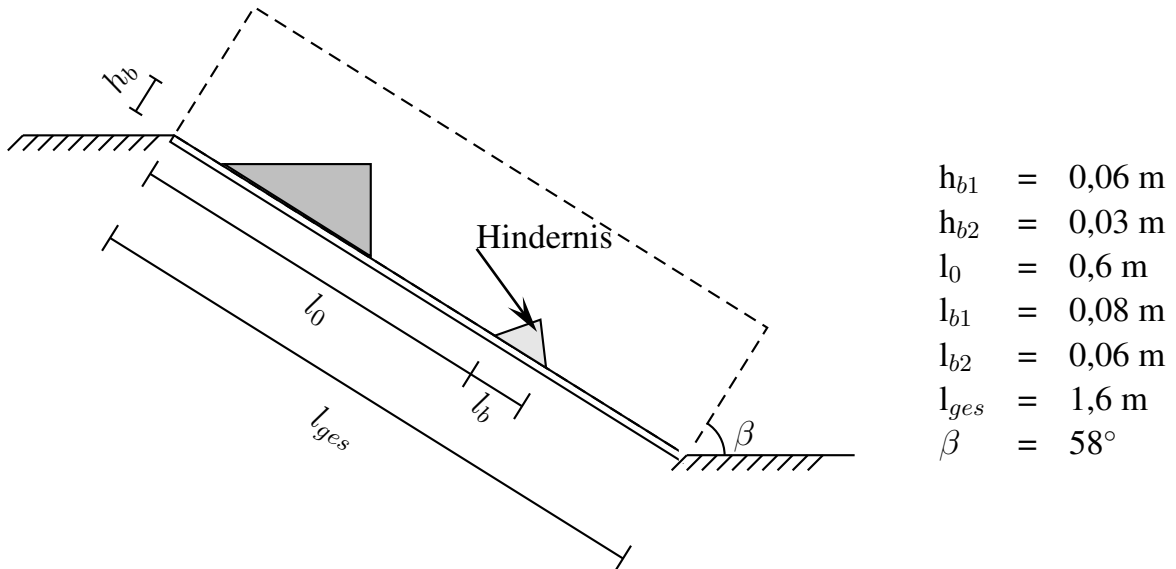


Bild 6.19: Systemskizze der Hangrutschung mit Hindernis

Untergrund wird auch das Hindernis als Teil der Struktur modelliert und steht ausschließlich über Kopplungselemente mit dem Granular in Wechselwirkung. Bild 6.20 zeigt das Finite-Elemente-Netz des Berechnungsgebietes im Bereich des Hindernisses für die beiden untersuchten Hindernisgeometrien.

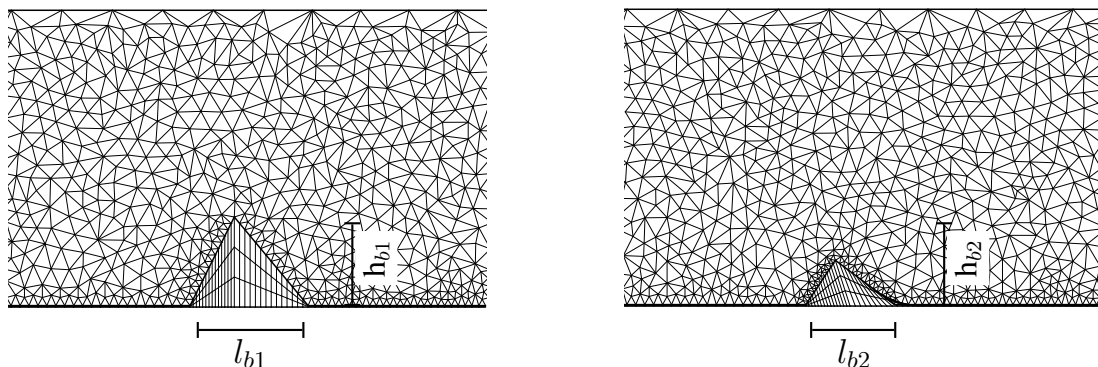


Bild 6.20: Finite-Elemente-Netz im Bereich des Hindernisses

Modellparameter und Anfangszustand stimmen mit der vorangegangenen Simulation überein, so daß die Hangrutschung bis zum Erreichen des Hindernisses nach t = 0,3 s

identisch verläuft. Bild 6.21 zeigt den weiteren Verlauf der Hangrutschung für die beiden untersuchten Geometrien. Aufgrund der geringen Höhe des niedrigeren, rechten Hindernisses überfließt das granulare Material diese Stelle nahezu ungehindert und nur ein geringer Anteil des Materials erreicht den Ruhezustand. Im Gegensatz dazu bewirkt das höhere Hindernis eine deutliche Bremsung der Bewegung. Etwa die Hälfte des Granulars kommt oberhalb der Barriere vollständig zu Ruhe, während das restliche Material mit geringerer Geschwindigkeit weiterfließt. Hinter dem Hindernis erreicht das Material in beiden Fällen einen quasi-statischen Zustand mit konstanter Höhe der Lawine und jeweils nahezu konstanter Geschwindigkeit, welche abhängig von der Menge des weiterfließenden Materials ist.

Das Beispiel zeigt, daß die verwendete Methode in der Lage ist, auch komplexe Geometrien und Anwendungen zu simulieren und zeigt weitere Möglichkeiten, das Modell zur Vorhersage bestimmter Aspekte granularer Strömungen zu nutzen.

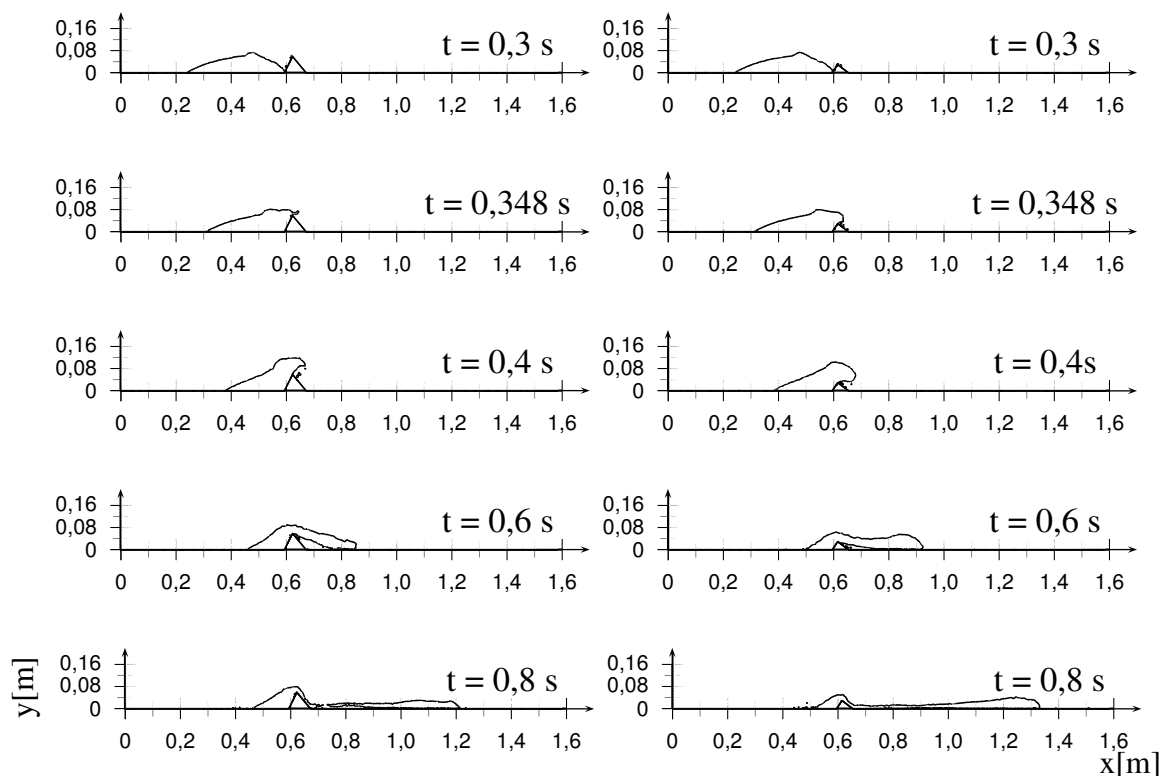


Bild 6.21: Bewegung des Granulars an einem Hang mit verschiedenen Hindernissen

7 Strukturanalyse von Silos

Ziele der Arbeit sind die numerische Simulation des Entleerungsvorganges von Silos und der damit verbundenen geometrischen und materiellen Einflüsse auf das Fließverhalten sowie Aussagen über Standsicherheit und Gebrauchsfähigkeit von Silos .

7.1 Phänomenologie und Bemessungsgrundlagen

Silos finden in vielen verfahrenstechnischen Prozessen verbreitete Anwendung. Sie unterscheiden sich in Lagersilos, Dosiersilos und Verladesilos, wobei Abmessungen und Aufbau eines Silos vorrangig vom verarbeiteten Material abhängen. Die verwendeten Schüttgüter reichen von Getreide, pharmazeutischen Pulvern und Salz bis zu Sand und Zement. Die Gesamthöhe des Silos folgt aus der wirtschaftlich sinnvollen Lagermenge. Die meisten in Deutschland bestehenden Getreidesilos fassen etwa 500 – 3500 t, was zu Bauhöhen von 10 bis 20 m führt. Sie besitzen eine Vielzahl unterschiedlicher Korngrößen, Fließeigenschaften und Dichten, welche in der Bemessung zu beachten sind. Für die Auslegung von Silos ist zunächst die Art des zu lagernden Schüttgutes von Bedeutung. Dessen Materialeigenschaften bestimmen Trichterneigung und Ausflußöffnung ebenso wie erforderliche Austragsorgane. So muß schon während der Planung das Fließprofil bestimmt werden, da es sonst zu verfahrenstechnischen Problemen und Qualitätseinbußen kommen kann.

So stellt sich für Silos mit geringem Reibungsbeiwert und großer Trichteröffnung ein Massenfluß ein, welcher in Bild 7.1(a) dargestellt ist. Das gleichförmige Fließprofil ermöglicht die vollständige Entnahme des gelagerten Schüttguts und erfordert somit keine zusätzlichen Austragshilfen für die Gewährleistung der gesetzlich vorgeschriebenen Rückverfolgbarkeit [2]. Die hinsichtlich des Fließprofils günstigen Massenflußsilos erfordern jedoch bei gleichbleibendem Volumen eine wesentlich größere Bauhöhe als Kernflußsilos und verursachen somit deutlich höhere Investitionskosten.

Infolge des ungleichmäßigen Fließprofils können tote Zonen entstehen, in welchen sich das granulare Material nicht bewegt und die entfernt werden müssen, siehe Bild 7.1(b). Weitere Diskontinuitäten im Fließprofil entstehen bei geringer Trichterneigung infolge von Verdichtungs- und Auflockerungszonen im Trichter [34, 87]. Aufgrund der inneren Reibung bilden sich im oberen Trichterbereich gewölbeförmige Verdichtungszone

wie in Bild 7.1(c), welche ein weiteres Ausfließen beeinträchtigen. Abhängig von den Randbedingungen zerfallen diese Brücken in regelmäßigen Zeitintervallen, da das darunter befindliche, aufgelockerte Material nicht die ausreichende Tragfähigkeit besitzt. Dies führt zu pulsierendem Ausfließen, welches sich auf die Wandnormalspannung auswirkt [12].

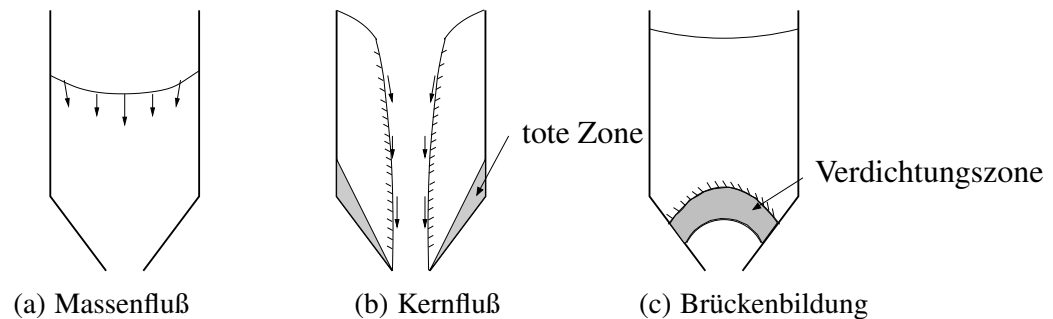


Bild 7.1: Fließprofile

Nach der Festlegung der geforderten Abmessungen des Silos folgt die statische Bemessung. Die ersten Betrachtungen des Füllzustandes von Silos durch Janssen [50] bilden die Grundlage der aktuellen Norm [1] und zeigen eine über die Höhe ansteigende Wandnormalspannung und einen Hauptspannungsverlauf wie in Bild 7.2(a). Die Spannungen im Ruhezustand folgen aus den Feststoffeigenschaften des Schüttgutes und sind reibungsdominiert. Nach dem Öffnen des Silos erfolgt eine Phasentransformation in einen flüssigkeitsähnlichen Zustand und das Silomaterial bildet ein Gewölbe über dem Trichter, siehe Bild 7.2(b). Das infolge dieses Switches [12, 56] entstehende Maximum der Wandnormalspannung t_{max} bewegt sich von der Öffnung nach oben und erreicht in Massenflußsilos am Übergang von Trichter und Schacht ein Maximum, siehe Bild 7.2(c). In Kernflußsilos entsteht das Spannungmaximum am Schnittpunkt von toter Zone und Silowand. Ausbildung und Größe des Spannungsmaximums hängen unter anderem vom verwendeten Material, der Wandrauhigkeit und der Trichtergeometrie ab [6, 53, 71], wobei eine geringere Wandrauhigkeit die maximal zu erwartenden Spannungen reduziert. Rotter et al. [15, 80, 81] zeigen die Auswirkungen des Switches in Zusammenarbeit mit exzentrischer Entleerung auf das Tragvermögen der Silostruktur.

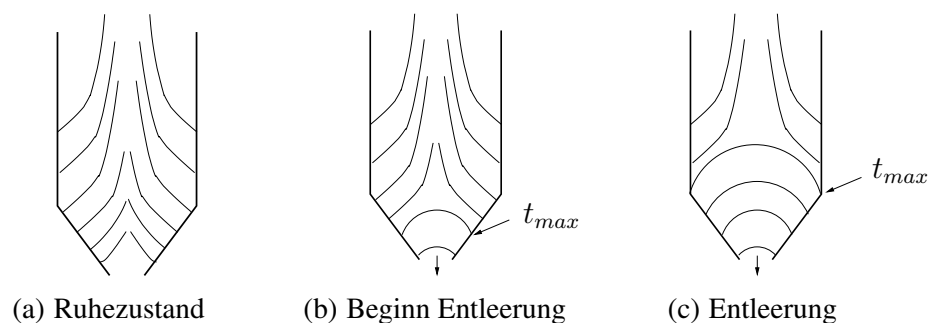


Bild 7.2: Hauptspannungstrajektorien während der Phasentransformation

Die in der Norm [1] definierten Lastannahmen berücksichtigen die dynamische Belastung ausschließlich über empirische Faktoren, welche daher leicht unterschätzt werden und weitere Untersuchungen zur Verteilung der Randspannungen erfordern. Weiterhin führen asymmetrische Be- und Entladeprozesse zu exzentrischen, zum Teil lokal begrenzten Lasten, welche eine erhöhte Festigkeit der tragenden Struktur voraussetzen [27, 80].

Daher folgt in den kommenden Abschnitten eine Untersuchung der Spannungsverteilung in Silos bei dynamischer Belastung unter Verwendung der in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Modellgleichungen und ihrer numerischen Lösung.

7.2 Vorbetrachtungen

Die Untersuchung des Entleerungsvorganges von Silos erfordert eine vorangehende Betrachtung des Füllzustandes. Zunächst folgt die Ermittlung des Füllzustandes, welcher aufgrund des Materialmodells und der auftretenden Reibungskräfte zwischen Schüttgut und Silowand eine nichtlineare Spannungsverteilung aufweist. Die Darstellung des Ausfließen granularen Materials aus einem Silo mit ebenen Boden verdeutlicht die Unterscheidung in Kern- und Massenflußsilos sowie die Ausbildung des Phasenübergangs zwischen festem und flüssigem Bewegungszustand.

7.2.1 Füllprozeß

Vor der Simulation des Entleerungsvorganges in Silos ist zunächst eine wirklichkeitsnahe Bestimmung des Füllzustandes erforderlich. Das Materialverhalten während des Entleerens ist entscheidend von der Materialverteilung und dem daraus resultierenden Spannungsverlauf beeinflusst. Insbesondere die infolge Wandreibung entstehende nichtlineare Verteilung und Größe der Wandnormalspannung beeinflussen die nachfolgende Bewegung.

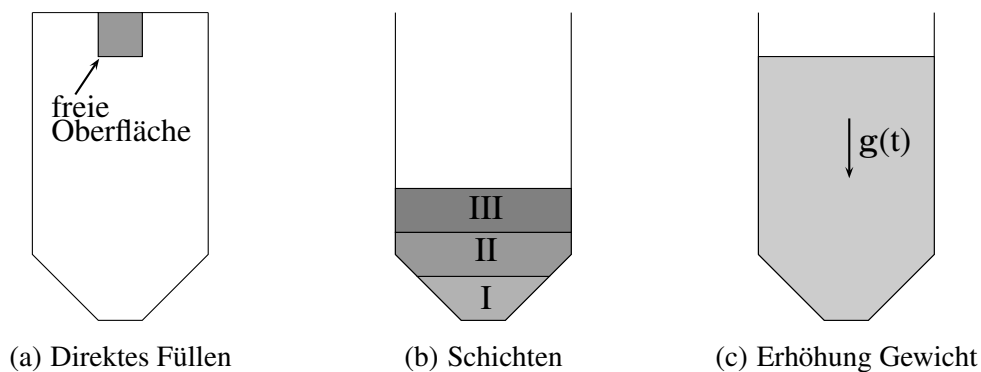


Bild 7.3: Füllmethoden

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, den Füllprozeß zu simulieren und somit die nichtlinearen Materialeffekte zu berücksichtigen. Die erste, in Bild 7.3 abgebildete Variante, ermöglicht die Füllung des Silos von oben wie es in der Realität erfolgt. Dabei wird zunächst eine freie Oberfläche vorgegeben, welche das einzufüllende Material umschließt. Infolge der Schwerkraft fällt das Granular und füllt das Silo schichtenweise. Die erforderlichen Einströmrandbedingungen für die Abstandsfunktion der Level-Set-Methode und ein mögliches Abreißen des Flusses führen jedoch zu einer numerisch bedingten großen Anzahl finiter Elemente.

Einfacher umzusetzen und schneller in der Berechnung sind die beiden von Keiter [56] verglichenen Methoden. Die Silofüllung der in Bild 7.3(b) dargestellten Variante erfolgt schichtenweise. Zunächst ist ausschließlich das mit I markierte Gebiet mit granulearem Material gefüllt. Nach dessen Setzung und der Ausbildung eines stationären Spannungszustandes folgt die Belastung infolge des Materials der zweiten Schicht. Die Methode bietet insbesondere den Vorteil für ausgeprägtes pfadabhängiges Materialverhalten den Füllvorgang realitätsnah zu simulieren. Daher findet in dieser Arbeit die dritte Variante, Bild 7.3(c), Anwendung, welche die Gewichtskraft im gesamten Gebiet stetig erhöht. Hierbei wird die Dynamik des Füllprozesses nicht berücksichtigt, um für den Entleerungsvorgang eindeutige Anfangsbedingungen definieren zu können. Die beiden folgenden Beispiele zeigen den Spannungszustand im gefüllten Silo, welcher sich infolge Eigengewicht mit dem gewählten Verfahren ausbildet.

Zunächst erfolgt ein Vergleich der so gewonnenen Ergebnisse mit der von Holst [38] initiierten Zusammenstellung einer großen Anzahl an Simulationsergebnissen verschiedener Arbeitsgruppen, welche die Ermittlung des Füllzustandes des in Bild 7.4 dargestellten Systems zum Ziel hat. Vorgegeben sind der Wandreibungswinkel μ , der Haftreibungswinkel φ_h sowie die Abmessungen des Gebiets. Das gewählte Berechnungsgebiet

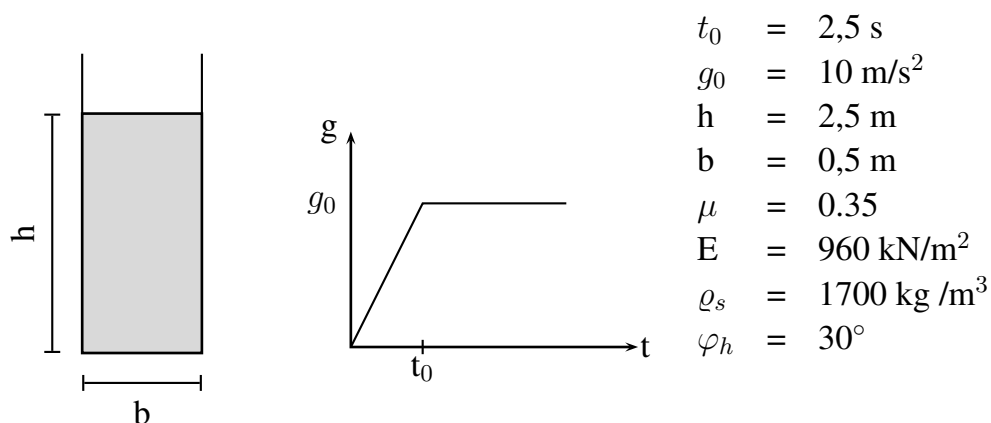


Bild 7.4: Geometrie und Materialparamter nach Holst [38]

ist um 10% höher als die von Holst vorgegebenen Abmessungen, um eine freie Oberfläche mit Hilfe der Level-Set-Methode abbilden zu können. Bis zum Zeitpunkt t_0 steigt die Belastung infolge Eigengewicht linear an und bleibt anschließend konstant. Die

langsame Belastungssteigerung ermöglicht eine schrittweise Ausbildung der Spannung innerhalb des Granulars und somit auch die geschwindigkeitsabhängige Übertragung der Scherspannungen auf die Silowand über Reibung. Die zeitliche Abfolge in Bild 7.5

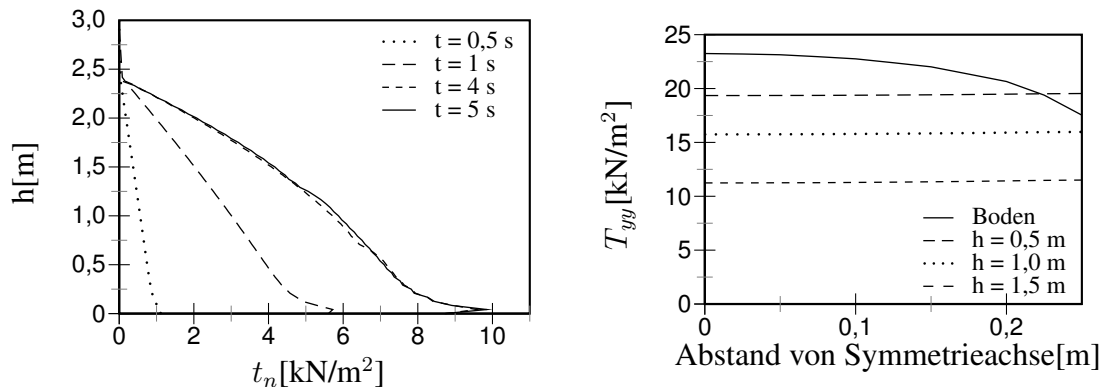


Bild 7.5: Wandnormalspannungs- und Vertikalspannungsverteilung

links verdeutlicht die Entwicklung der Wandnormalspannung, welche vorrangig durch die maximal aufzunehmende Reibungskraft bestimmt wird. Das rechte Bild zeigt die Vertikalspannung T_{yy} innerhalb des granularen Materials in verschiedenen Höhen über den Querschnitt. Es ist zu erkennen, daß die Vertikalspannung entlang der Symmetrieachse linear mit der Tiefe steigt, während sie entlang der Wand abnimmt. Die ermittelten Ergebnisse, insbesondere die starke Abnahme der Spannung auf dem Boden, stimmen sehr gut mit den in Holst [38] dargestellten Werten überein.

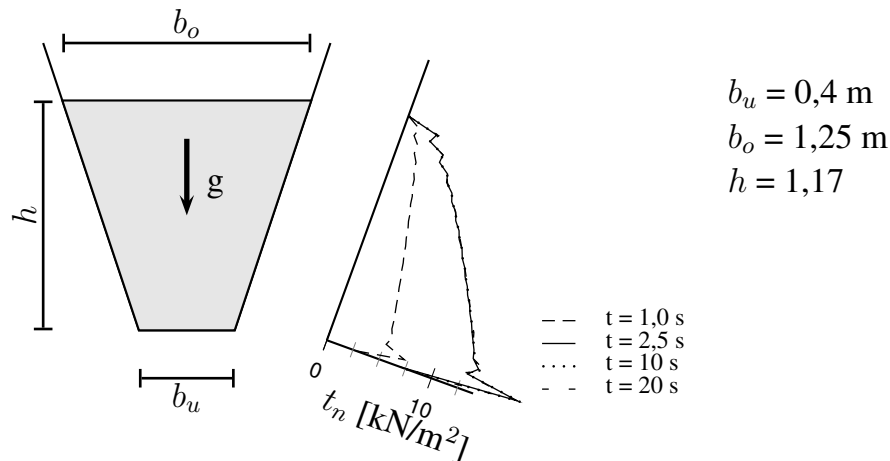


Bild 7.6: System, Modellparameter und Spannungsverteilung nach Keiter [56]

Nach der Validierung des Modells für einfache Geometrien mit parallelen Wänden erfolgt nun der Vergleich mit den Ergebnissen Keiters [56] für einen mit granulearem Material gefüllten Trichter, siehe Bild 7.6. Materialparameter und Belastungsverlauf entsprechen den im vorangegangenen Beispiel verwendeten Werten. Der statische Verlauf der Wandnormalspannung im gefüllten Zustand ist qualitativ den gemessenen Werten sehr ähnlich, die Maximalspannung übersteigt die Vorgaben jedoch um etwa 5%.

7.2.2 Silo mit ebenem Boden

Der folgende Abschnitt zeigt das Fließverhalten granularer Materialien aus einem Silo mit ebenem Boden. Bild 7.7 zeigt das betrachtete System, Abmessungen und Materialparameter. Die Breite der Öffnung b_0 ist variabel. Aufgrund der symmetrischen Anordnung erfolgt die Berechnung des Ausflusses ausschließlich für die linke Hälfte des Silos. Die Abgrenzung der einheitlich vernetzten Teilgebiete für granulares Material und Luft erfolgt mit Hilfe der Level-Set-Methode. Die ebenfalls berechnete Silowand

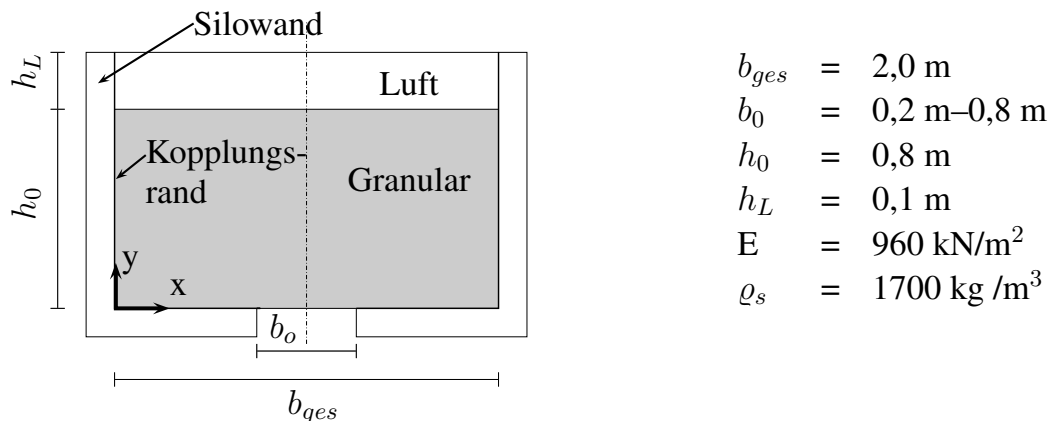


Bild 7.7: Systemskizze für Silo mit flachem Boden

ist über Kopplungselemente mit den Materialien innerhalb des Silos verbunden. Die Kopplungselemente erlauben die Berücksichtigung reibungsbehafteter Randbedingungen und folgen den Gleichungen (5.38 – 5.44). Für die Beschreibung des Granulars findet die in Kapitel 4 vorgestellte Mehrphasenformulierung Anwendung.

Vor Beginn der Simulation des Entleerungsvorganges erfolgt die Bestimmung des Füllzustandes, wobei zur Verbesserung der Konvergenz der Übergangsparameter ξ zu Null und der Reibungsbeiwert konstant zu $\mu = 0.3$ gesetzt ist. Die vertikale Geschwindigkeit im Bereich der Öffnung ist zunächst über Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben. Die berechnete Spannungsverteilung und der Druck am Ende des Füllvorganges sind

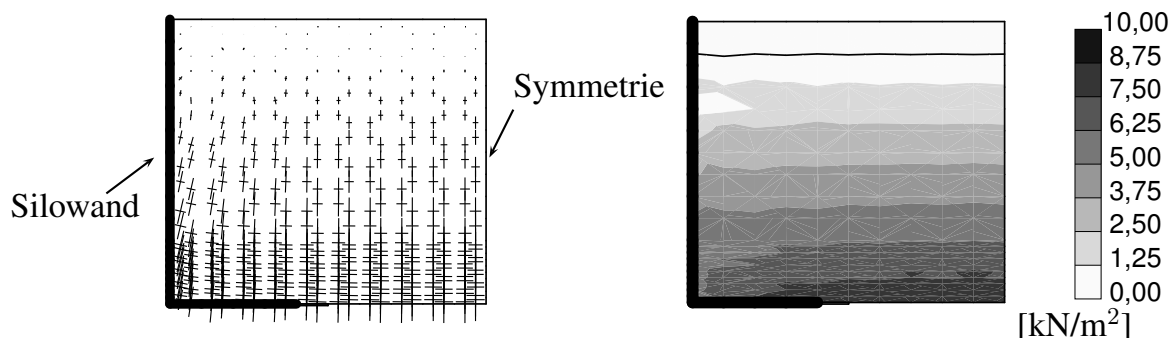


Bild 7.8: Spannungstrajektorien und Druckverteilung im Füllzustand

in Bild 7.8 für die linke Hälfte des Gesamtsystems dargestellt. Entlang der Symmetrieachse treten ausschließlich Normalspannungen in vertikaler Richtung auf, während

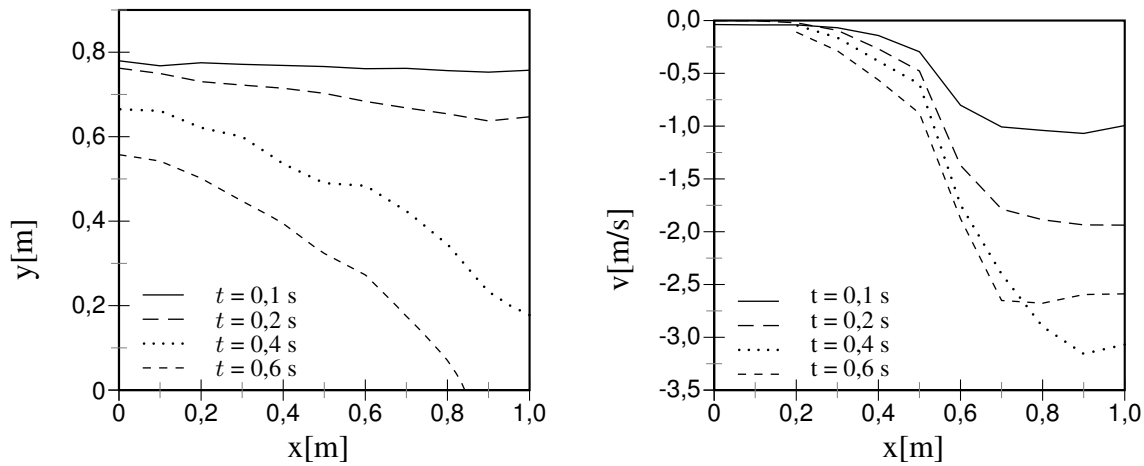


Bild 7.9: Oberflächenlage und Geschwindigkeitsprofil für $b_0 = 0,8\text{m}$

entlang der Wand infolge Reibung Scherspannungen auftreten. Der Druck steigt nahezu linear über die Höhe an, erreicht jedoch in Wandnähe nur eine geringere Größe, weil die Belastung infolge Eigengewicht auf die Wand übertragen wird.

Nach Erreichen des Ruhezustandes und zu Beginn der Entleerung entfallen die Geschwindigkeitsrandbedingungen im Bereich der Öffnung und das Material beginnt zu fließen. Zunächst veranschaulicht Bild 7.9 den zeitlichen Verlauf der Oberflächenlage für einen Öffnungsgröße $b_0 = 0,8\text{ m}$. Die für das Materialmodell in Gleichung (4.10) benötigten Kennwerte sind der Haftreibungswinkel $\varphi_h = 30^\circ$, der Gleitreibungswinkel $\varphi_g = 20^\circ$ und die Viskosität des verflüssigten Granulars von $\eta = 100\text{Ns/m}^2$. Die Oberfläche des granularen Materials senkt sich aufgrund der großen Öffnung nahezu gleichmäßig ab und bildet erst gegen Ende der Entleerung einen Trichter. Die gleichmäßige Absenkung folgt aus der im Öffnungsbereich auftretenden gleichförmigen Bewegung, welche beispielhaft für die vertikale Geschwindigkeit in einer Höhe $h = 0,2\text{ m}$ über dem Boden im rechten Bild dargestellt ist.

Das verbleibende Material ist weiterhin feststoffdominiert und erreicht einen stationären Zustand. Die dunkelmarkierten Bereiche in Bild 7.10 kennzeichnen Gebiete des Materials, für welche der Übergangsparameter $\xi = 0$ ist. Alle Berechnungen erfol-

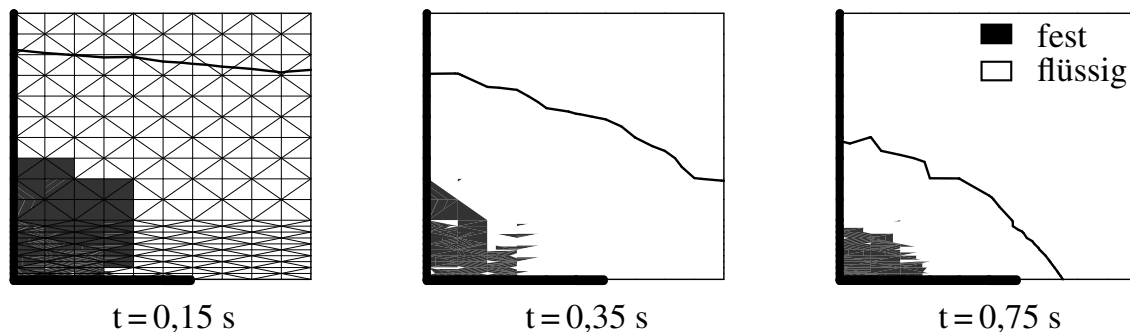


Bild 7.10: Entleerungsvorgang für $b_0 = 0,8\text{m}$

gen mit dem dargestellten Finite-Elemente-Netz. Das Beispiel zeigt, daß für Silos mit ebenem Boden Bereiche existieren, welche auch bei maximaler Entleerung im Silo verbleiben und somit zusätzliche Austragshilfen erforderlich machen.

Dieses Phänomen ist ausgeprägter je geringer die Öffnungsbreite ist. Für eine kleinere Öffnung $b_o = 0,2 \text{ m}$ entsteht für ein Material mit identischen Materialparametern ein reines Kernflußprofil. Ausschließlich der Bereich unmittelbar oberhalb der Öffnung fließt, und die Oberfläche senkt sich, wie in Bild 7.11 dargestellt, vorrangig entlang der Symmetrieachse ab. Das Material innerhalb der Fließzone erfährt eine vollständige

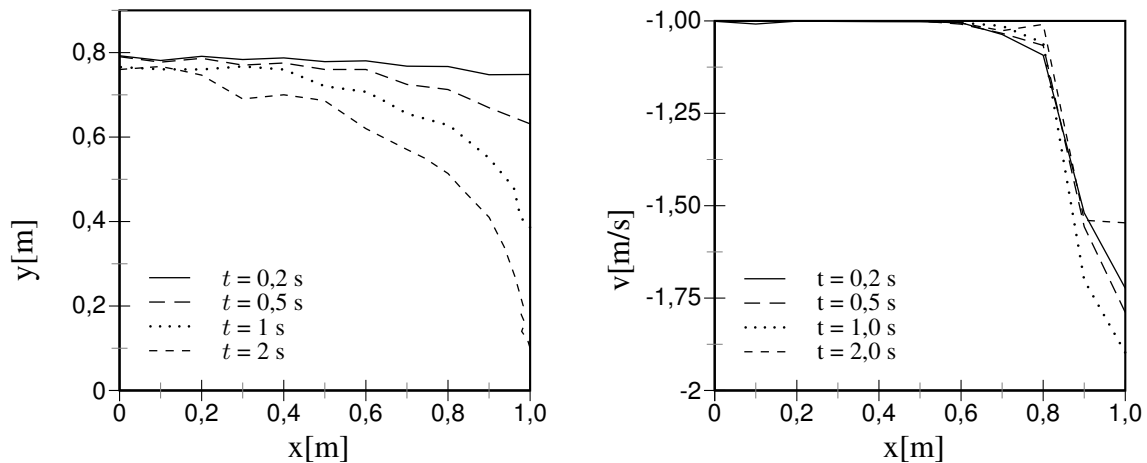


Bild 7.11: Oberflächenlage und Geschwindigkeitsprofil für $b_0 = 0,2 \text{ m}$

Verflüssigung und fließt schnell, beeinflusst dabei jedoch nur die unmittelbar benachbarten Bereiche. Aufgrund des Nachbruchverhaltens folgt eine Verbreiterung des Trichters über die Zeit, die jedoch im Vergleich zur Entleerung mit $b_o = 0,8 \text{ m}$ sehr langsam erfolgt. Somit sind größere, in Bild 7.12 dunkelmarkierte Bereiche unbeeinflusst von der Entleerung.

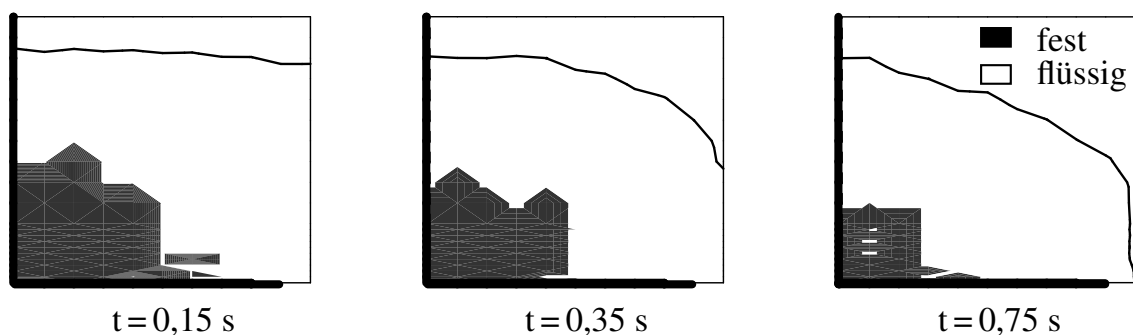


Bild 7.12: Entleerungsvorgang für $b_0 = 0,2 \text{ m}$

Neben einer Veränderung der Öffnungsbreite beeinflusst auch das verwendete Material und der Wandreibungswinkel den Entleerungsvorgang. Bild 7.13 stellt den zeitlichen Verlauf der Oberfläche für verschiedene Haftreibungswinkel φ_h und Reibungsbeiwerte

μ dar. Das linke Diagramm zeigt den Einfluß der Haftreibung. Zu Beginn der Entleerung zeigen beide Materialien ein nahezu identisches Fließverhalten, da zunächst nur das Material unmittelbar oberhalb der Öffnung beeinflusst ist und im übrigen Material keine zusätzlichen Scherspannungen auftreten, welche zu plastischem Fließen führen. Erst bei fortschreitender Entleerung entstehen Unterschiede im Fließprofil, da für geringere Scherfestigkeiten das der Fließzone benachbarte Material schneller fließt und somit die Trichterausbreitung begünstigt. Der Wandreibungsbeiwert μ beeinflusst

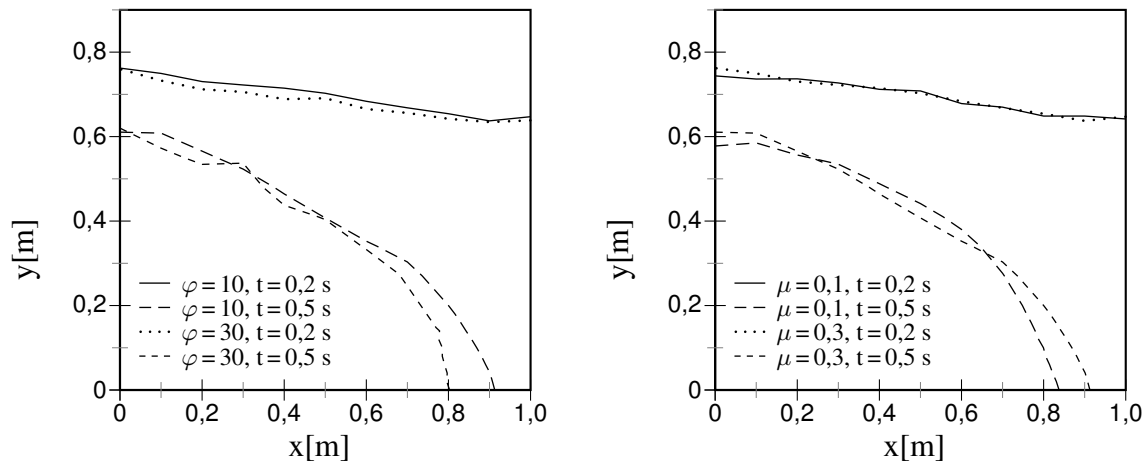


Bild 7.13: Höhe der Füllung über die Zeit bei flachem Boden

vorrangig die Bewegung des granularen Materials in Wandnähe. So ermöglicht eine Wandreibung $\mu = 0,1$ eine geringere Übertragung von Scherspannung auf die Silowand, so daß die infolge der Entleerung und der damit verbundenen Trichterneigung auftretenden Scherspannungen nicht aufgenommen werden können. Die folgenden größeren Bewegungen bewirken einen größeren Massenfluß an der Öffnung.

7.3 Verfahrenstechnische Betrachtungen

Zu Beginn der Planung eines Silos steht die verfahrenstechnische Auslegung, welche Größe, Form und Entleerungsverhalten betrachtet. Die geometrischen Abmessungen beeinflussen die Lagermenge und die Form des Fließprofils, welches sich als Kern- oder Massenfluß einstellt. Weiterhin ist die Entleerungsgeschwindigkeit und die verbleibende Füllmenge von Bedeutung.

7.3.1 Siloabmessungen und Modellparameter

Für die weiteren Untersuchungen hinsichtlich der Siloentleerung folgen die Abmessungen den Vorgaben von Negi und Jofriet [53, 71], da für sie umfassende Untersuchungen

verschiedener Aspekte wie Strömungsprofil und Wandrauigkeit in einem ebenen Modellsilo vorliegen. Die Modellierung kann daher im ebenen Verzerrungszustand erfolgen. Sowohl die Trichterneigung als auch die Trichteröffnung und Wandreibungswinkel sind variabel. Die Darstellung der freien Oberfläche erfolgt mit Hilfe der Level-Set-Methode, wobei die Füllhöhe des Silos $h_f = h_{tr} + h_{sch}$ als Anfangsbedingung gegeben ist. Der darüberbefindliche, luftgefüllte Teil des Silos beeinflusst die Berechnung nur unwesentlich und wird ausschließlich zur Bestimmung der Lage der Oberfläche genutzt. Neben der Symmetrierandbedingung und der Ausflußgeschwindigkeit ist die elastische

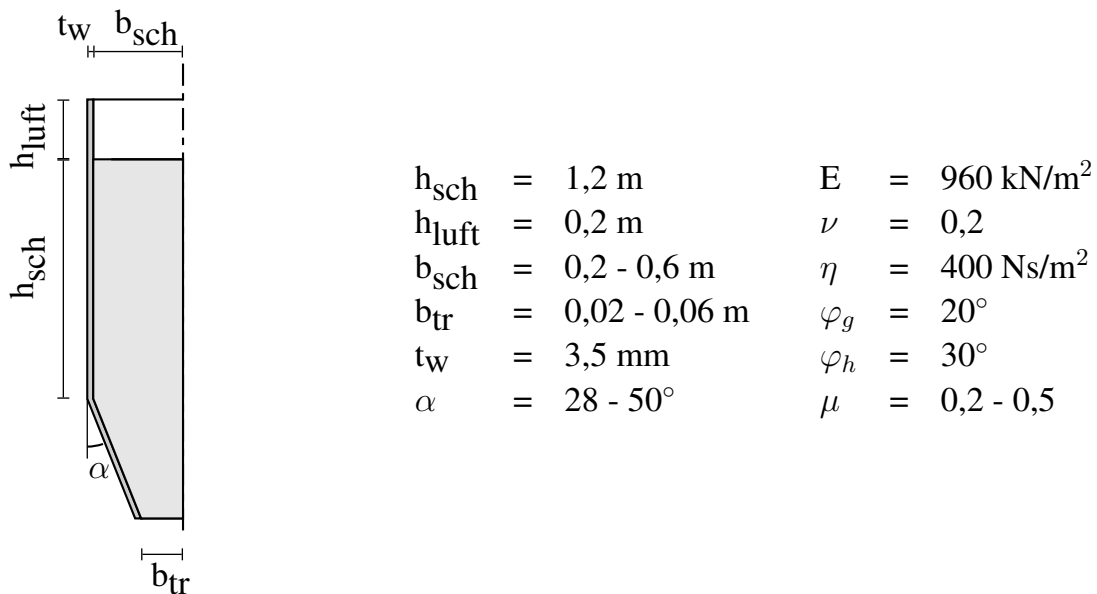


Bild 7.14: Abmessungen des Silos und Materialparameter des Schüttguts

Silowand starr gelagert und erlaubt somit zunächst keine Wandverformungen. Für weitergehende Untersuchungen der Interaktion zwischen der verformbaren Silowand und dem granularem Material wird jedoch eine punktuelle Lagerung betrachtet. Das granulare Material wird mittels der Modellgleichungen der vorangegangenen Kapitel und den in Bild 7.14 genannten Materialparametern modelliert.

7.3.2 Entleerungsgeschwindigkeit

Zur Silobemessung ist zunächst die Bestimmung der möglichen Lagermenge sowie der Entnahmegeschwindigkeit von großer Bedeutung. Diese ist abhängig von der Art des gelagerten Schüttgutes sowie von der gewählten Geometrie. Die Untersuchung erfolgt für ein Material und verschiedene Siloabmessungen, um die Geschwindigkeit während des Entleerungsvorganges zu bestimmen. Bild 7.15 zeigt den zeitlichen Verlauf der Ausflußmenge für die angegebenen Geometrien. Die Ausflußmenge \dot{m}_a je Zeiteinheit

$$\dot{m}_a = \int_0^{b_{tr}} v \cdot \varrho \, dx \quad (7.1)$$

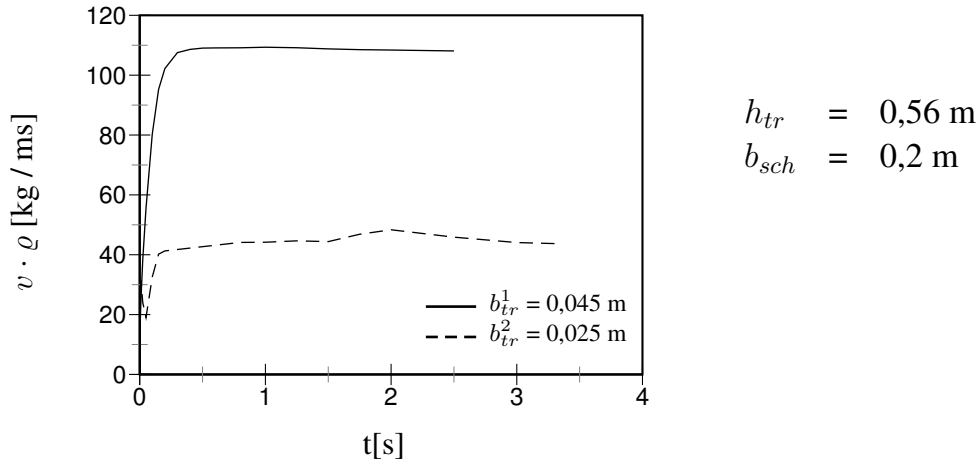


Bild 7.15: Massenfluss für verschiedene Öffnungsbreiten

gibt die zu entnehmende Schüttgutmenge aus Geschwindigkeit v und Dichte ϱ an. Die Ausflußmenge ist unabhängig von der Füllhöhe des Silos, da die trägheitsdominierte Strömung im Ausflußbereich von den Druckverhältnissen, ausgedrückt mit der Froude-Zahl $Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$, abhängt [86]. Der Phasenübergang zwischen festem und flüssigen Material bewirkt eine Entkopplung der beiden Strömungsbereiche entsprechend der Unterscheidung zwischen Strömen und Schießen. Somit gilt für die Ausflußmenge nach Beverloo [11, 88] stets

$$\dot{m}_a \sim A_{eff} \cdot d^{1/2} \sim \begin{cases} d^{1,5} & \text{für Rechteckquerschnitte} \\ d^{2,5} & \text{für Kreisquerschnitte} \end{cases} \quad (7.2)$$

mit der effektiven Öffnungsfläche A_{eff} und dem Öffnungsdurchmesser d . Nach einer Auflockerungs- und Beschleunigungsphase bis zum Zeitpunkt 0,1 s folgt die nahezu konstante, füllhöhenunabhängige Entleerung. Die Ausflußmenge für $b_{tr} = 0,045 \text{ m}$ ist deutlich größer als für das Silo mit geringerer Öffnungsbreite, da auch die Ausflußgeschwindigkeit größere Werte annimmt. Die berechneten Werte entsprechen den zu erwartenden Relationen von

$$\left(\frac{0,045}{0,025} \right)^{1,5} \sim 2,4 \sim \frac{108}{45} \quad (7.3)$$

sehr gut. Die Geschwindigkeiten am Ausfluß sind in Bild 7.16 dargestellt. Die Koordinate $x=0$ kennzeichnet hierbei den Knoten unmittelbar an der Silowand, während die Werte entlang der Symmetrieachse am rechten Rand des Diagramms liegen. Für das breitere Silo beschleunigt das Material im Entleerungsbereich sehr schnell, um ab $t=1 \text{ s}$ in einen stationären Strömungszustand zu gelangen. Das Schüttgut im schmaleren Silo erfährt hingegen eine geringere Beschleunigung und die Maximalgeschwindigkeit entlang der Symmetrieachse beträgt etwa die Hälfte der entsprechenden Geschwindigkeit im Silo mit 0,045 m Öffnungsbreite. Der Grund für das unterschiedliche Fließverhal-

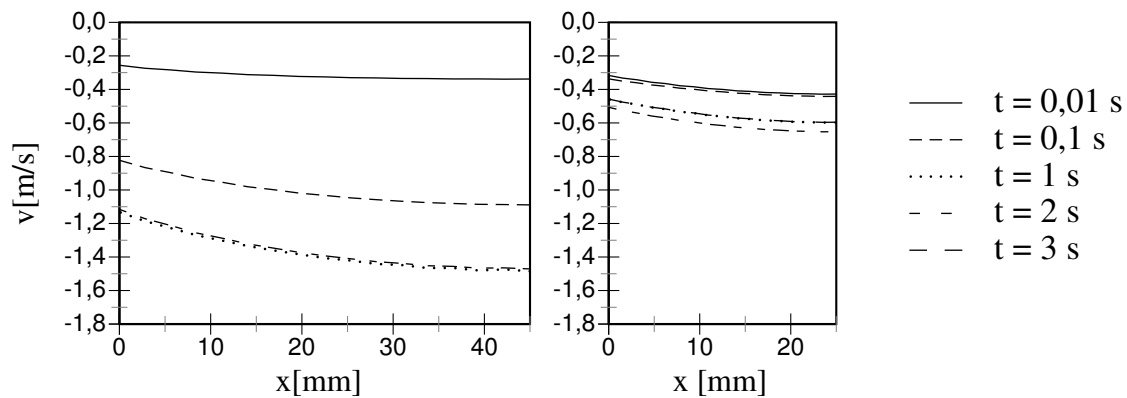


Bild 7.16: Geschwindigkeiten am Ausfluss

ten ist die der Strömung entgegenwirkende Reibung zwischen Schüttgut und Silowand, welche bei geringerer Öffnungsgröße einen größeren Einfluß besitzt. Je größer die Öffnung desto ungehinderter kann das Material fließen, es lockert auf und erlaubt somit auch schnelles Fließen in Wandnähe.

Die Menge des entnommenen Materials beeinflusst unmittelbar die zeitliche Entwicklung der Füllhöhe des Silos. Bild 7.17 zeigt einen Vergleich zwischen den berechneten Werten und den von Negi [71] experimentell in einem ebenen Silo ermittelten Füllhöhen. Aufgrund der konstanten Entleerungsgeschwindigkeit im Auslauf nimmt die

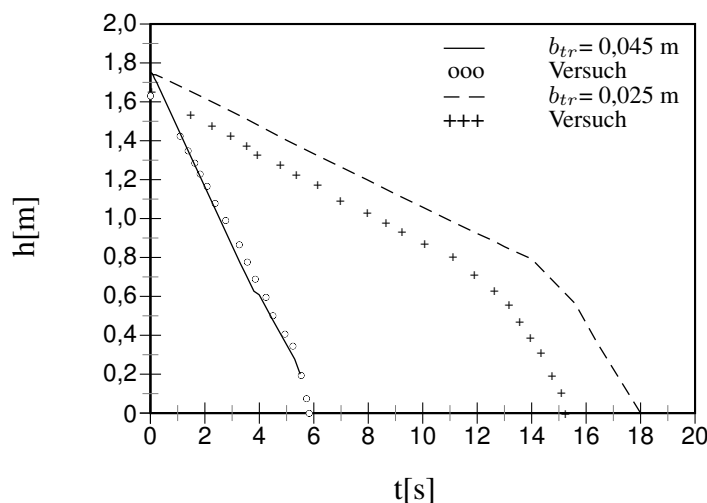


Bild 7.17: Höhe der Füllung über Zeit

Füllhöhe zunächst linear mit der Zeit ab. Unter Vernachlässigung von Verdichtungs- und Auflockerungszonen ist die Geschwindigkeit proportional zum Querschnitt in der betrachteten Höhe, da ein konstanter Massenfluß gewährleistet sein muß. Sobald ausschließlich der Trichter gefüllt ist, nimmt die Silobreite ab und die Oberfläche sinkt schneller. Dieser Effekt ist für geringere Öffnungsbreiten verstärkt zu beobachten, da das Verhältnis von Ausflußmenge zu Schüttgutmenge im Schaft größer ist.

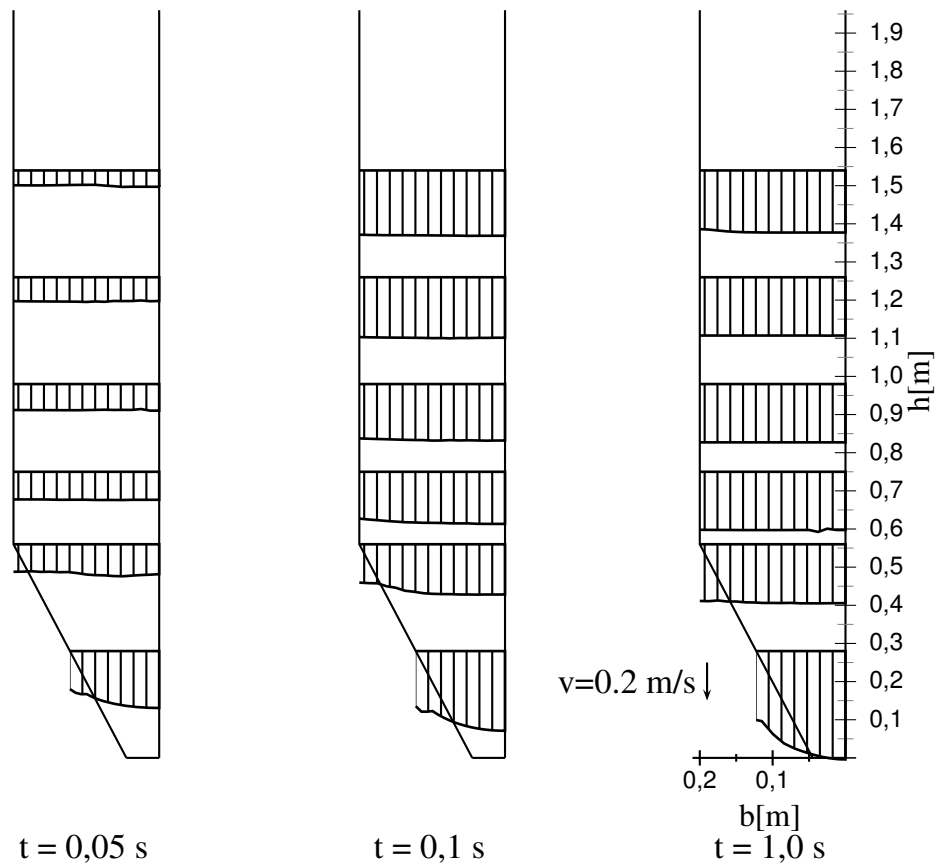


Bild 7.18: Geschwindigkeitsprofil für verschiedene Höhen

Die gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung im Silo in verschiedenen Höhen und ihre zeitliche Entwicklung ist in Bild 7.18 nochmals für $b_{tr} = 0,045 \text{ m}$ dargestellt. Das gesamte Material beschleunigt bis zum Zeitpunkt $t = 0,1 \text{ s}$ und fließt dann mit gleichmäßiger Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit in der Mitte des Trichters beträgt ungefähr das Doppelte der Geschwindigkeit des Materials im Schaft. In Höhe des Übergangs zwischen Trichter und Schaft entspricht die Bewegung noch annähernd der Schaftgeschwindigkeit, zeigt jedoch stärkere Reibungseinflüsse zur Silowand, da infolge des Knicks eine Verminderung der Geschwindigkeit erfolgt.

7.3.3 Verdichtungszone und Auflockerung

Das Schüttgut entwickelt erst nach einer Beschleunigungsphase ein gleichförmiges Geschwindigkeitsprofil. Unmittelbar im Anschluß an die Öffnung des Silos entstehen infolge einer ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung über der Höhe Verdichtungs- und Auflockerungszone. Die zeitlichen Änderungen der Schüttgutdichte folgen aus einer über die Höhe ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung. Bild 7.19 zeigt den zeitlichen Verlauf der vertikalen Geschwindigkeit entlang der Symmetrieachse in verschiedenen Höhen. Das negative Vorzeichen kennzeichnet die Richtung entgegen der

positiven y-Achse und somit die Vertikalgeschwindigkeit nach unten. Zunächst beschleunigt das gesamte Material nach dem Öffnen des Silos, erfährt dann jedoch infolge der Reibkräfte entlang der Silowand, der entstehenden Dichteunterschiede und der Querschnittsänderung über der Höhe eine Verminderung der Vertikalgeschwindigkeit.

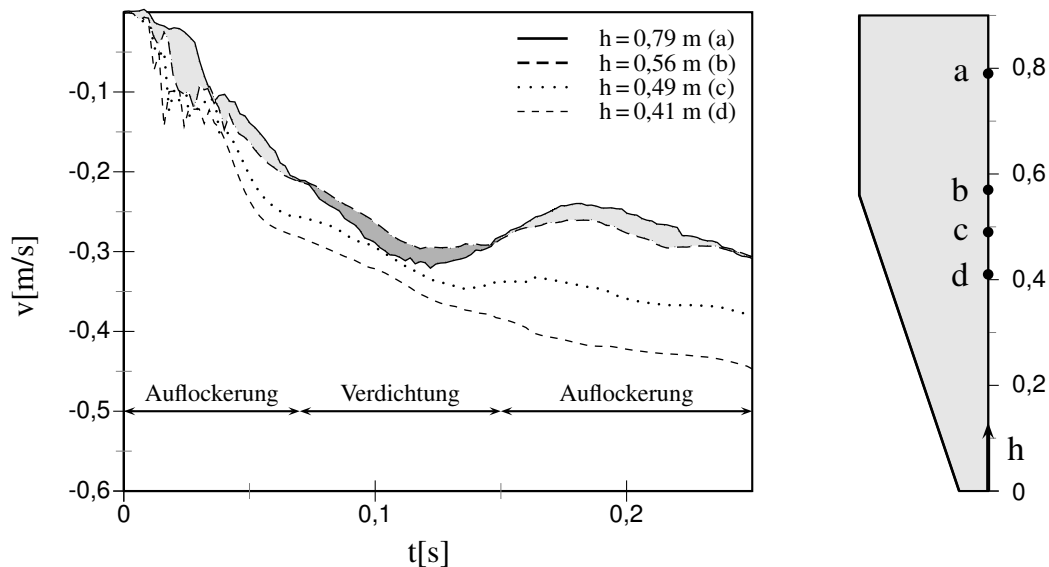


Bild 7.19: Geschwindigkeiten

Insbesondere die Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen dem Übergang von Trichter zu Schaft und dem Schüttgut im Schaft führt zu Verdichtungseffekten im Bereich des Übergangs. Die grau gekennzeichneten Bereiche in Bild 7.19 verdeutlichen Auflockerungs- und Verdichtungszeiträume. Unmittelbar nach dem Öffnen des Silos beschleunigt das Material, beginnend von der Öffnung, wobei sich die Geschwindigkeit nach oben ausbreitet. Somit lockert das Material auf. Infolge der entstandenen Dichteunterschiede fällt das Schüttgut im Schaft schneller als das Schüttgut im Trichter und es folgt eine Verdichtung. Im weiteren Verlauf der Entleerung wechseln sich Auflockerung und Verdichtung ab, so daß eine pulsierende Dichteverteilung folgt. Das Material im unteren Bereich des Trichters lockert sich unmittelbar nach dem Öffnen auf und bewegt sich anschließend ohne weitere Schwingungen. Daher ist die Verdichtungszone auf den Übergang zwischen Trichter und Schaft beschränkt.

Andererseits entstehen in Massenflußsilos mit kleiner Ausflußöffnung stabile Verdichtungszone unmittelbar über dem Ausfluß. Diese Brückenbildung hängt von der Festigkeit des Materials und der Größe der Auslauföffnung ab und kann aus Betrachtung der Spannungen im Trichter vorhergesagt werden. In realen Silos sind für solch ungünstige Abmessungen Austragshilfen vorzusehen [86]. In den hier betrachteten Silos ist die Auslauföffnung jedoch stets hinreichend groß.

Bild 7.20 zeigt die entstehende Druckverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten. Der

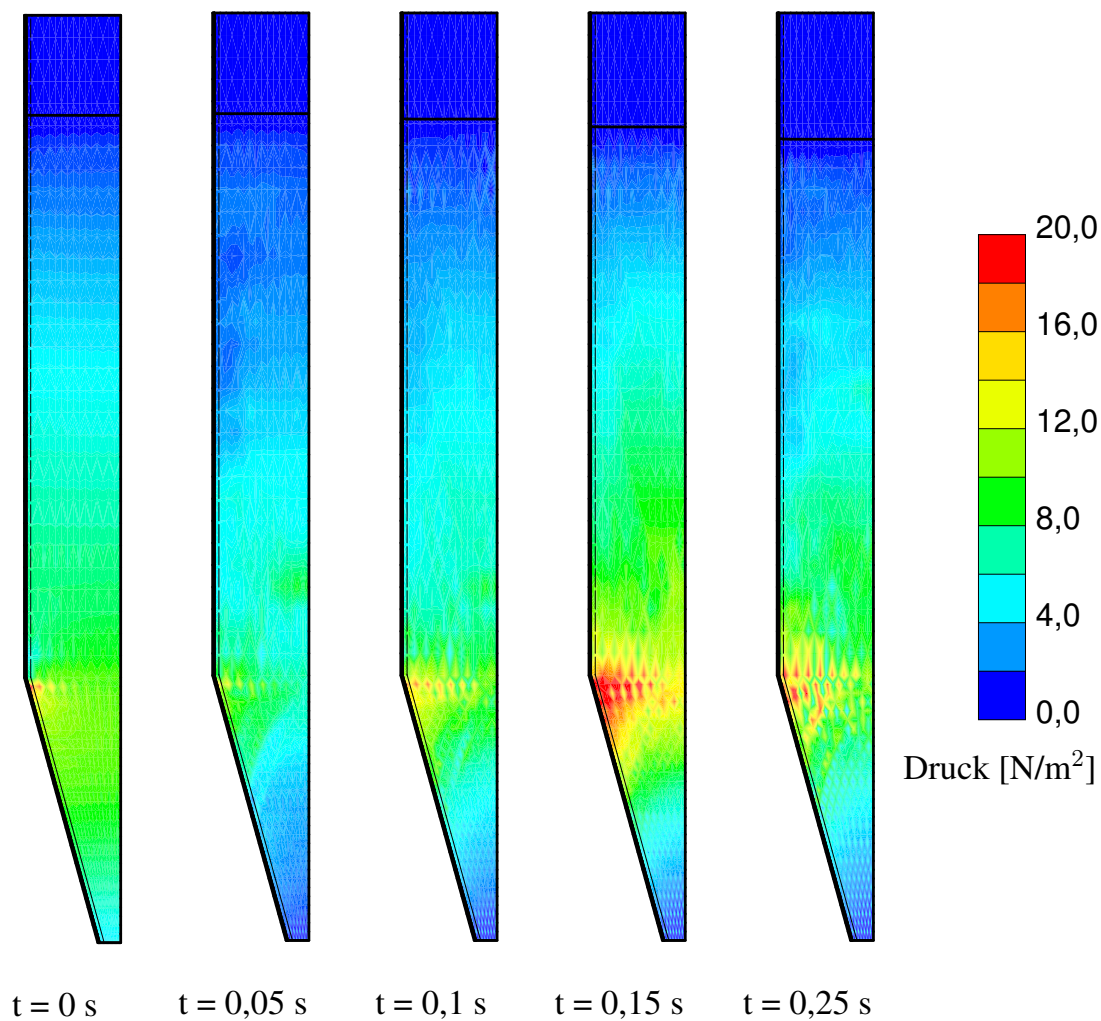


Bild 7.20: Druckverteilung im Silo zu Beginn der Entleerung

Ruhezustand ist durch eine nahezu hydrostatische Druckverteilung gekennzeichnet, wobei der Druckgradient im Trichter abnimmt, da Vertikalkräfte infolge Eigengewicht sowohl durch Reibung als auch über Normalkräfte auf die Silowand übertragen werden. Die Auflockerung zu Beginn der Entleerung führt zu geringen Drücken im gesamten Schüttgut. Insbesondere das Material unmittelbar über der Öffnung zeigt geringere Drücke und somit eine verminderte Dichte. Nach etwa 0,07 s beginnt die Verdichtung, so daß der Druck im Übergangsbereich zwischen Schaft und Trichter bis zum Zeitpunkt $t = 0,15 \text{ s}$ stetig zunimmt. Eine Zone großer Dichte bildet sich beginnend von der Ecke aus. Der Zeitpunkt $t = 0,25 \text{ s}$ kennzeichnet das Ende der folgenden Auflockerungsphase, welche jedoch eine geringere Amplitude als die erste aufweist, so daß weiterhin ein überhöhter Druckgradient im Trichter erkennbar ist. Das Pulsieren zeigt eine Periode von ungefähr $T = 0,15 \text{ s}$, welche nahezu konstant bleibt. Das Phänomen des pulsierenden Ausfließens untersuchen auch Roberts [79] und Tejchman [92], da es zu ungünstigen Belastungen der Silowand sowie zu verfahrenstechnisch erforderlichen Austragshilfen führen kann.

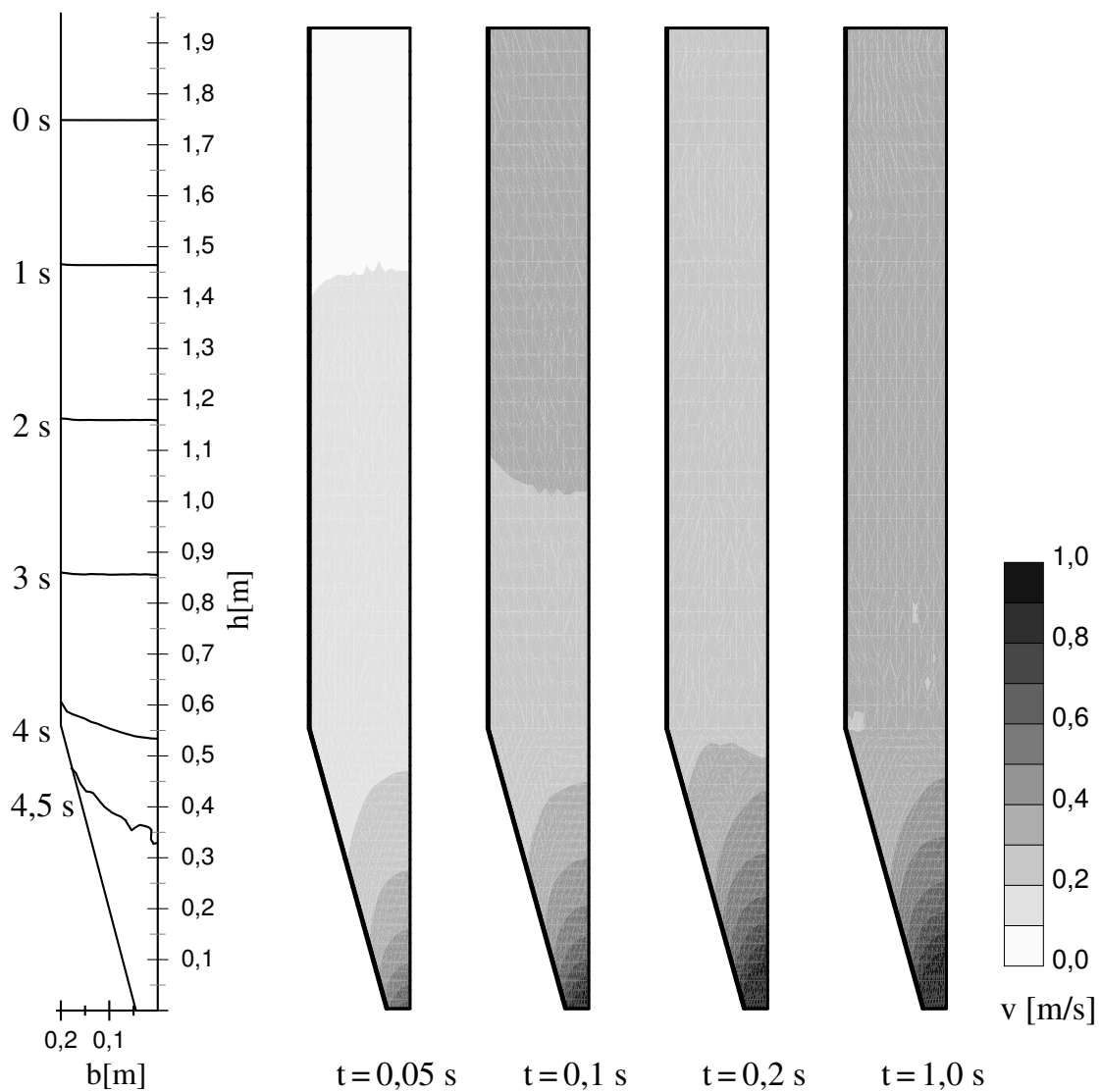


Bild 7.21: Oberfläche und Geschwindigkeitsverteilung für $b_{sch} = 0,2$ m

7.3.4 Kern- und Massenfluß

Die bisher betrachtete Geometrie führt mit den verwendeten Materialparametern zu einem Massenflußsilo. Das Material fließt über den Querschnitt gleichförmig und die freie Oberfläche bleibt nahezu horizontal. Die daraus resultierenden Vorteile sind die Rückverfolgbarkeit des Materials sowie die vollständige Entnahme des granularen Materials. Andererseits bedarf diese Ausführungsform sehr viel größerer Abmessungen des Silos für vergleichbare Lagermengen als Kernflußsilos. Entscheidend für die Form des Fließprofils sind die Trichterneigung, der Wandreibungskoeffizient und der innere Reibungswinkel des Granulars, da die Entstehung toter Zonen ausschließlich über das Verhältnis der Wandspannungen bestimmt ist [51]. Samadani[82] zeigt Geschwindigkeitsmessungen in Kernflußsilos, während Nedderman [70] die Ausbildung ruhender, toter Zonen in Abhängigkeit von geometrischen Abmessungen untersucht. Weitere Ex-

perimente stellt Waters [102] vor.

Bild 7.21 zeigt die Lage der Oberfläche des Schüttguts zu verschiedenen Zeitpunkten und die räumliche Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit für das bereits betrachtete Massenflußsilo mit $b_{sch} = 0,2$ m und $b_{tr} = 0,045$ m. Die Geschwindigkeit im Schaft ist nahezu konstant und führt daher zu einer gleichmäßigen Absenkung der Oberfläche. Die Geschwindigkeit im Trichter ist unmittelbar über der Öffnung am größten und nimmt mit der Höhe und in Nähe der Silowand ab, so daß eine geneigte Oberfläche für $t = 0,45$ s folgt. Die Geschwindigkeit des Materials im Schaft nimmt zunächst zu und oszilliert anschließend um einen Wert von etwa $0,2$ m/s. Die Geschwindigkeitsverteilung im Trichter ist nach einer Beschleunigungsphase bis $t = 0,1$ s nahezu konstant und ausschließlich von der Größe der Öffnung und der Wandreibung beeinflusst.

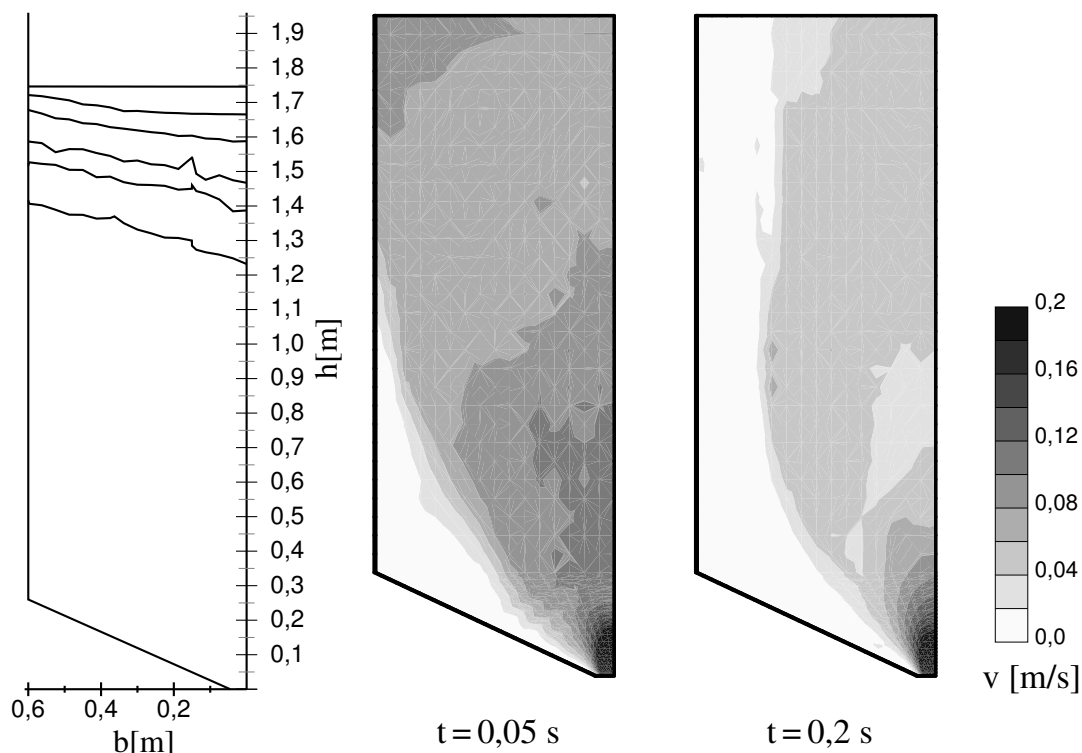


Bild 7.22: Oberfläche und Geschwindigkeitsverteilung für $b_{sch} = 0,6$ m

Andererseits zeigt dasselbe Material für ein Silo mit $b_{sch} = 0,6$ m ein anderes Fließprofil. Neben der deutlich langsameren Entleerung aufgrund des Verhältnisses von gesamter Silobreite zur Öffnungsbreite b_{tr} zeigt Bild 7.22 auch ein geneigtes Fließprofil. Das Material entlang der Symmetrieachse fließt schneller als entlang der Silowand. Daher entstehen Bereiche innerhalb des Silos, welche im ruhenden Zustand verbleiben. Die Verteilung der vertikalen Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t = 0,05$ s und $t = 0,2$ s zeigt die trichterförmige Ausbildung der Fließzone. In Massenflußsilos ist die Neigung des Trichters größer als die entstehende Fließzone innerhalb des Materials und somit kann das gesamte Material fließen. Für das breite Silo ist eine Unterscheidung in fließende und ruhende Zonen mit Hilfe der Geschwindigkeitsbetrachtung möglich.

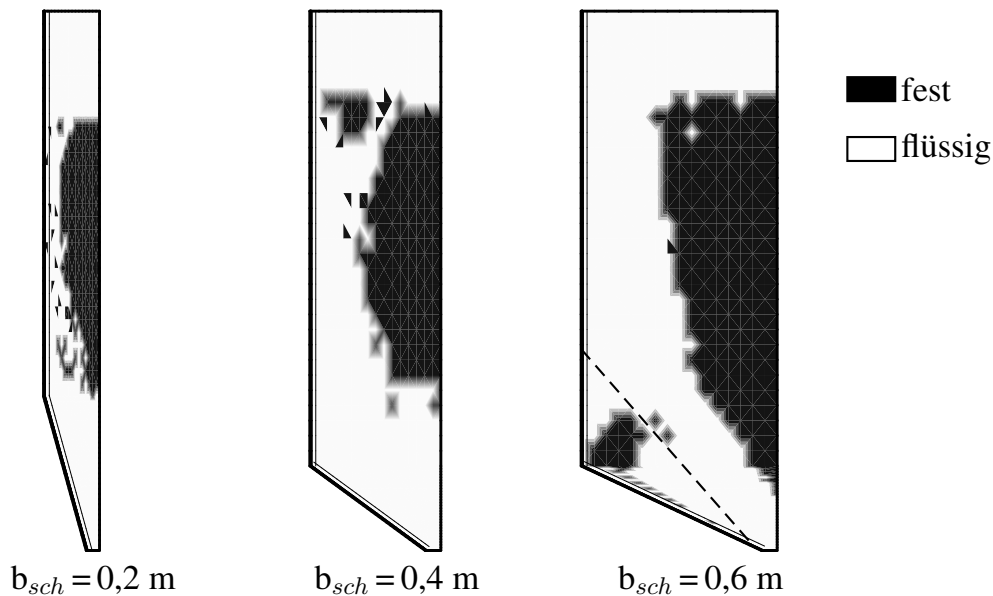


Bild 7.23: Verteilung der Übergangsfunktion für verschiedene Geometrien

Weiterhin zeigt Bild 7.23 die räumliche Verteilung des Übergangskoeffizienten ξ innerhalb des Schüttguts für verschiedene Abmessungen zum Zeitpunkt $t = 50 \text{ ms}$ und verdeutlicht somit die Einteilung in fließende und ruhende Bereiche. Es sind ausschließlich die Werte 0,0 und 1,0 für ξ dargestellt, da der Phasenübergang sehr schnell innerhalb eines Zeitschrittes erfolgt und somit kaum darstellbar ist. Für alle drei Beispiele folgt eine Fließzone entlang der Silowand und im Trichter unmittelbar über der Öffnung, während das Material entlang der Symmetrieachse im Schaft Festkörpereigenschaften aufweist und sich somit als nahezu starrer Block abwärts bewegt. Die Unterschiede im Fließverhalten verdeutlicht der Bereich im Übergang zwischen Schaft und Trichter, welcher im Kernflußsilo analog zu Abschnitt 7.2.2 nahezu unbeeinflusst von der Entleerung und somit in Ruhe bleibt. Die für das Kernflußsilo eingezeichnete Grenzfläche veranschaulicht näherungsweise die Übergangszone zwischen dieser toten Zone und dem Bereich des fließenden Materials.

Eine Möglichkeit zur Verlagerung des Phasenübergangs und somit zur Verteilung der zeitabhängigen Belastung in Silos sind die von Lehmann [61] simulierten Einbauten.

7.4 Konstruktive Bemessung der Silostruktur

Nach der Auslegung eines Silos hinsichtlich der erwünschten Füllmenge und Ausflußgeschwindigkeit folgt die statische Bemessung der Silostruktur. Dazu ist eine Bestimmung der auftretenden Belastungen sowie ihre räumliche und zeitliche Verteilung erforderlich.

7.4.1 Zeitliche Entwicklung

Der Füllzustand folgt aus der in Abschnitt 7.2.1 dargestellten Methode und ist durch eine nichtlineare Spannungsverteilung im Silo charakterisiert. Im Knick zwischen Trichter und Schaft entstehen aufgrund geometrischer Zwangsbedingungen Spannungsextrema, die jedoch keinen großen Einfluß auf das restliche granulare Material haben. Die Oszillationen im Lösungsverlauf resultieren aus der Lösung des infolge der Reibrandbedingungen zwischen Schüttgut und Silowand schlecht konditionierten Gleichungssystems.

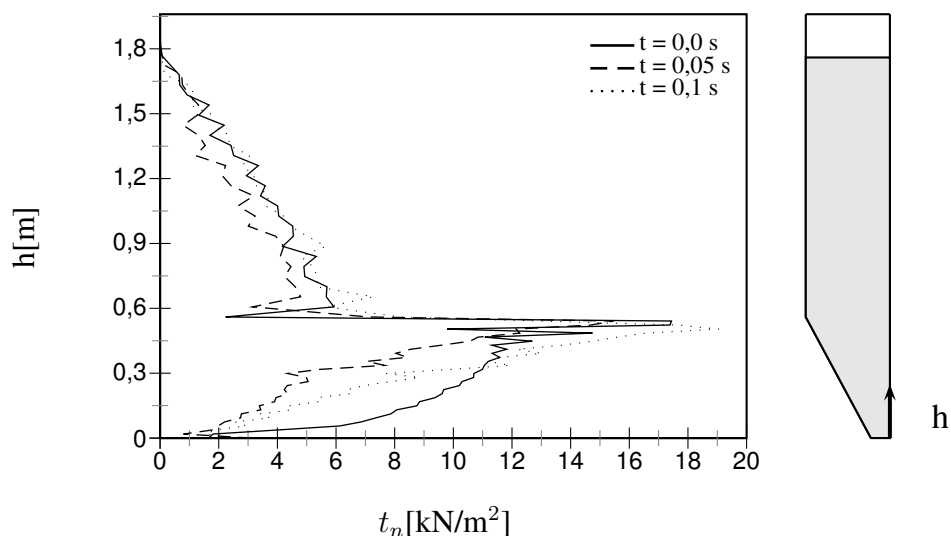


Bild 7.24: Randnormalspannungen für verschiedene Zeitpunkte

Bild 7.24 zeigt den Randspannungsverlauf über die Höhe zu verschiedenen Zeitpunkten. Beginnend mit dem Ruhezustand sinkt die Normalspannung auf die Silowand im Trichter mit der Zeit ab, da das fließende, aufgelockerte Material keine Kräfte auf die Wand überträgt. Die Spannung am Übergang steigt jedoch zunächst an, da das Material im Schaft in Bewegung gerät und an dieser Stelle eine Richtungsänderung erfährt. Über einen längeren Zeitraum betrachtet sinkt die Wandnormalspannung somit ab.

Bild 7.25 zeigt den zeitlichen Verlauf der Spannung exemplarisch für zwei Punkte und verdeutlicht die Übereinstimmung mit den von Jofriet und Negi [71] gemessenen Werten. Die Spannung infolge Eigengewicht ist für den Knoten im Schacht bei $h = 0,6 \text{ m}$ generell geringer als für den zweiten betrachteten Knoten unterhalb des Übergangs. Nach einem Anstieg der Spannung zu Beginn der Entleerung, welche im Folgenden näher erläutert wird, nimmt sie bis zur vollständigen Entleerung stetig ab. Nach etwa 4 s ist das Modellsilo vollständig entleert.

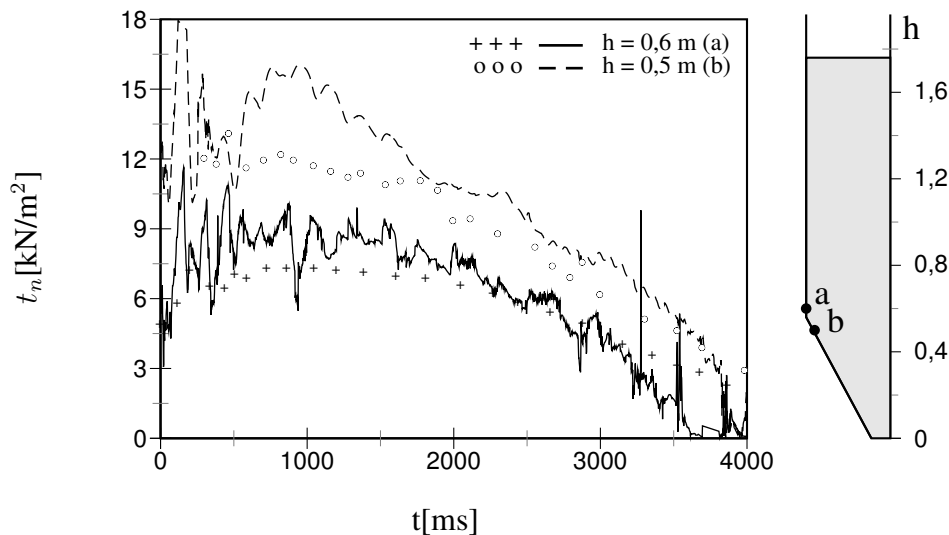


Bild 7.25: Zeitlicher Verlauf der Wandnormalspannung

7.4.2 Spannungen zu Beginn der Entleerung

Wie bereits Bild 7.25 zeigt, steigt die Normalspannung auf die Silowand zu Beginn der Entleerung an. Dieser Anstieg folgt aus einer Umlagerung der Spannungen innerhalb des Schüttgutes, welche in Bild 7.26 dargestellt ist. Im Ruhezustand dominieren Vertikalspannungen, da die Belastung aus Eigengewicht auf den geschlossenen Boden drückt. Die Horizontalspannung und die im Vergleich zum hydrostatischen Spannungszustand abweichenden Vertikalspannungen folgen aus den Reibungsbedingungen. Die nach dem Öffnen des Silos notwendige Umlagerung der Spannungen führt zu den drei weiteren dargestellten Spannungszuständen. Die Vertikalspannung im Bereich unmittelbar über der Öffnung verschwindet aufgrund der fehlenden Lagerung und das Gewicht des noch im Silo befindlichen Materials wird auf die Wände übertragen. Die verschwindende Vertikalspannung im Bereich der Öffnung führt somit zu einem Übergang von festem zu flüssigem Materialverhalten. Das fließende Material nimmt geringere Scherspannungen auf und kann sich somit ungehindert entlang der Silowand bewegen. Dies führt zu einer schnelleren Bewegung des Schüttgutes unmittelbar oberhalb des schon verflüssigten Materials. Somit folgt eine Ausbreitung der Fließzone nach oben und die Dichte des Materials im Trichter sinkt. Der Übergangsbereich ist in Bild 7.26 mit einer schwarzen Linie gekennzeichnet. Oberhalb der Linie weist das Schüttgut noch ähnliche Spannungen wie im Füllzustand auf, während unterhalb, in der Fließzone, kaum Vertikalspannungen existieren. Im Bereich des verflüssigten Materials herrscht ein radiales Spannungsfeld vor [54], welches zu den bereits beschriebenen Relationen für den Ausflußmassenström führt.

Die Umlagerung der Spannung führt zu einer Konzentration der Belastung auf die Silowand unmittelbar oberhalb der Fließzone, da das verflüssigte Material keine Belastun-

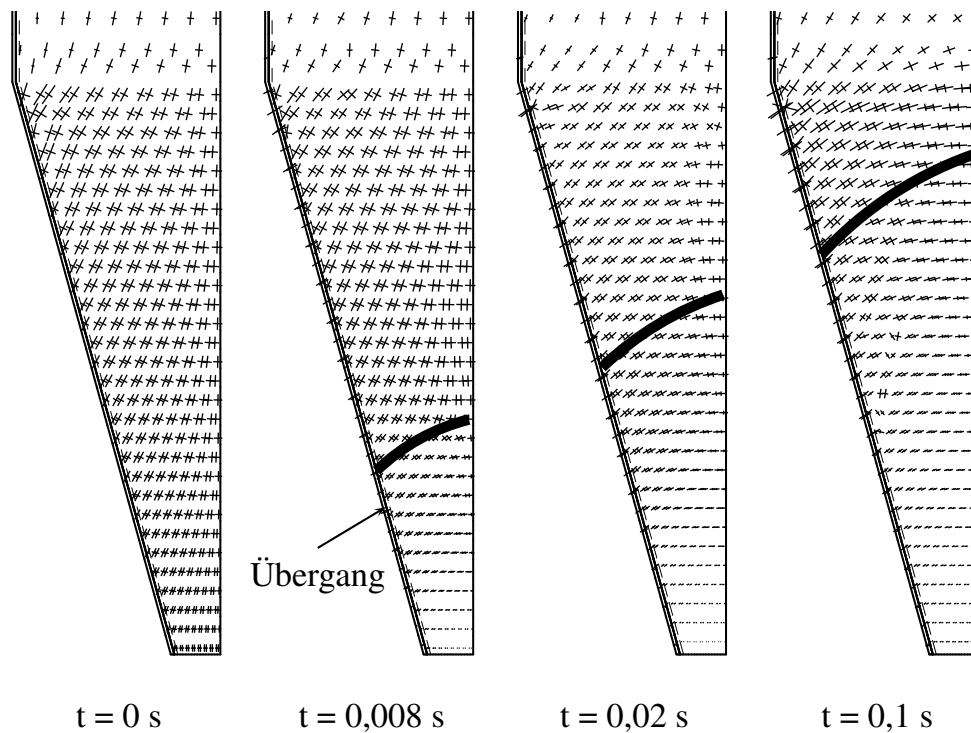


Bild 7.26: Spannungstrajektorien im Trichter zu verschiedenen Zeitpunkten

gen infolge Eigengewicht aufnimmt. Die Folge sind im Vergleich zum Ruhezustand erhöhte Normalspannungen auf die Silowand, welche in der konstruktiven Auslegung Berücksichtigung finden sollten. Bild 7.27 zeigt die Wandnormalspannung t_n im Trichter für verschiedene Zeitpunkte zu Beginn der Entleerung. Die Spannungen unmittelbar oberhalb der Öffnung sinken ab, da keine Vertikalspannung mehr aufgenommen werden können, und die Dichte sinkt. Oberhalb folgt jedoch aus der Konzentration der Belastung eine Erhöhung der Spannung, welche mit fortschreitender Verflüssigung nach oben verläuft.

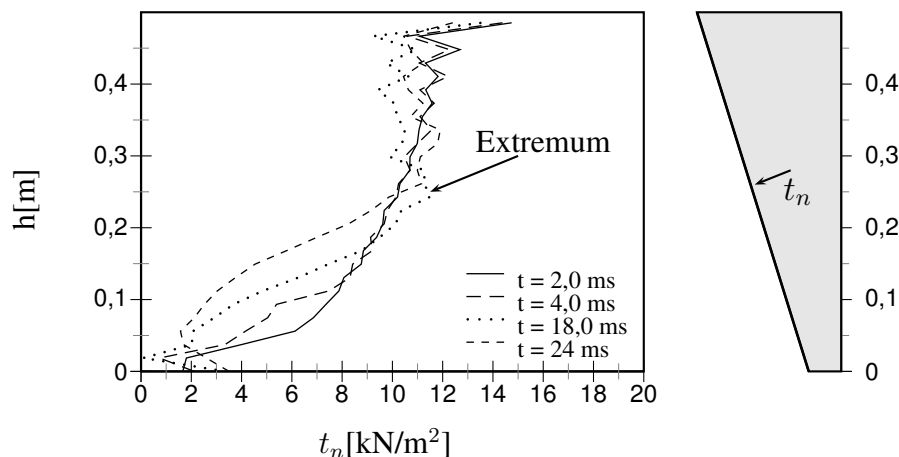


Bild 7.27: Spannungsverteilung über die Höhe zu Beginn der Entleerung

Bild 7.28 verdeutlicht daher die zeitliche Entwicklung der Spannung in verschiedenen Höhen über der Öffnung. An allen dargestellten Punkten steigt die Spannung zunächst an und fällt dann ab. Dabei ist die Größe der Belastungssteigerung auf die Silowand für Punkte nahe der Öffnung geringer, da nur ein geringer Anteil der Last umgelagert wird und sofort die Verflüssigung einsetzt. Je höher der betrachtete Punkt liegt desto später und größer ist die zu beobachtende Amplitude der Spannung. Die Lage des Extremwerts liegt stets am Übergangsbereich zwischen noch festem und bereits verflüssigtem granularen Material und folgt somit einer gleichförmigen, aufwärtsgerichteten Bewegung bis zum Übergang zwischen Trichter und Schaft.

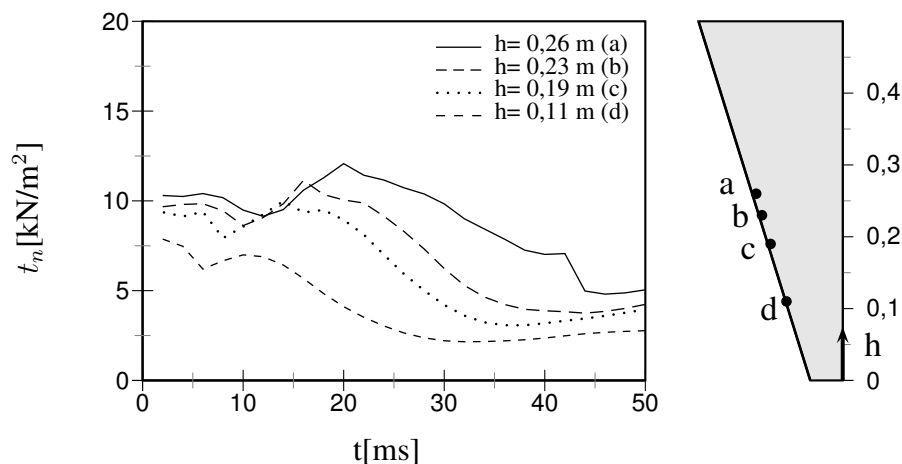


Bild 7.28: Zeitliche Spannungsentwicklung zu Beginn der Entleerung

7.4.3 Einfluß der Wandreibung

Der beschriebene Spannungsverlauf zu Beginn der Entleerung ist von einer Vielzahl Faktoren abhängig, wobei der Wandreibungsbeiwert zwischen Schüttgut und Silowand den größten Einfluß hat [53]. Materialwerte wie Reibungswinkel und Fließgrenze sowie die Abmessungen des Silos bestimmen die zu beobachtende Spannung ebenfalls, bewirken jedoch geringere Änderungen. Tejchman [92] zeigt weiterhin, daß der Wandreibungsbeiwert das Schwingungsverhalten und somit Siloschlagen und Silobrummen entscheidend beeinflusst.

Das Diagramm in Bild 7.29 zeigt die Spannungsverteilung über die Höhe zum Zeitpunkt $t = 20 \text{ ms}$ für verschiedene Wandreibungsbeiwerte. Die maximale Wandnormalspannung t_n steigt bei einer Verminderung des Wandreibungsbeiwerts um etwa 30% an. Die Lage des Spannungsmaximums ist nahezu unverändert.

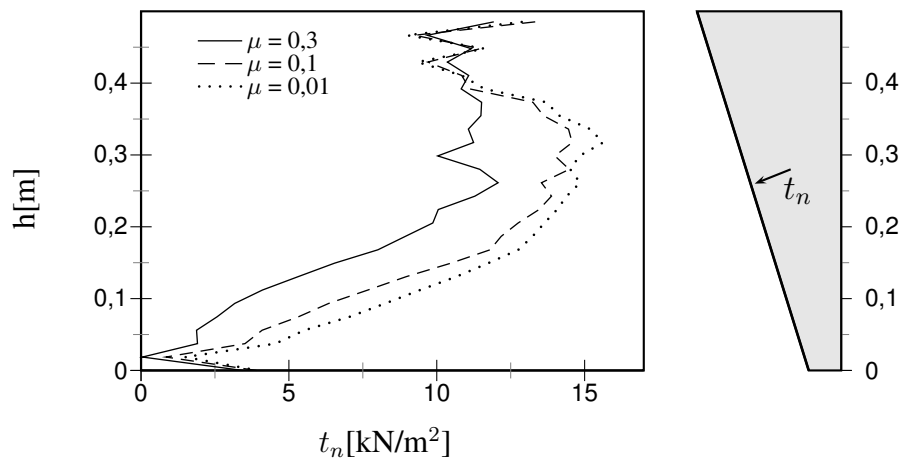


Bild 7.29: Spannungsentwicklung in Abhängigkeit der Wandreibungsbeiwerts μ

Das Diagramm in Bild 7.30 stellt die zeitliche Entwicklung der Wandnormalspannung in Abhängigkeit des Wandreibungsbeiwerts im Punkt a in einer Höhe von $h=0,26$ m dar. Die Zeit bis zum Erreichen der maximalen Spannung und somit die Lage des Übergangs von festem zu flüssigem Materialverhalten ist unabhängig vom Wandreibungsbeiwert, da hierfür vorrangig die Materialeigenschaften des Schüttguts von Bedeutung sind. Andererseits steht die Größe der Maximalspannung in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Wandreibungsbeiwert, welcher daher für die Bemessung der Silostruktur berücksichtigt werden muß.

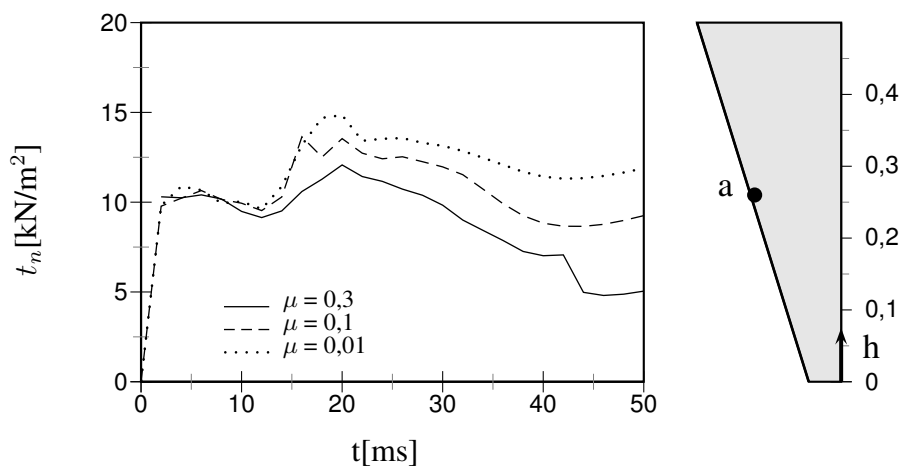


Bild 7.30: Spannungsentwicklung am Punkt (a) in Abhängigkeit des Wandreibungsbeiwerts μ

7.5 Wandverformung

Die bisher vorgestellten Untersuchungen des Entleerungsvorganges zeigen aufgrund der gewählten Randbedingungen entlang der starr gelagerten Silowand keine Strukturverformung. Um den Einfluß der Wandsteifigkeit auf Fließprofil und Wandnormalspannungsverteilung zu zeigen, werden anstelle der Streckenlagerung horizontale Auflager in den in Bild 7.31 gezeigten Punkten D_1 bis M_{tr} gewählt. Die Knoten entlang der Unterkante des elastischen Silos und am Übergang zwischen Schaft und Trichter sind zusätzlich in vertikaler Richtung gelagert. Die Modellierung erfolgt weiterhin im ebe-

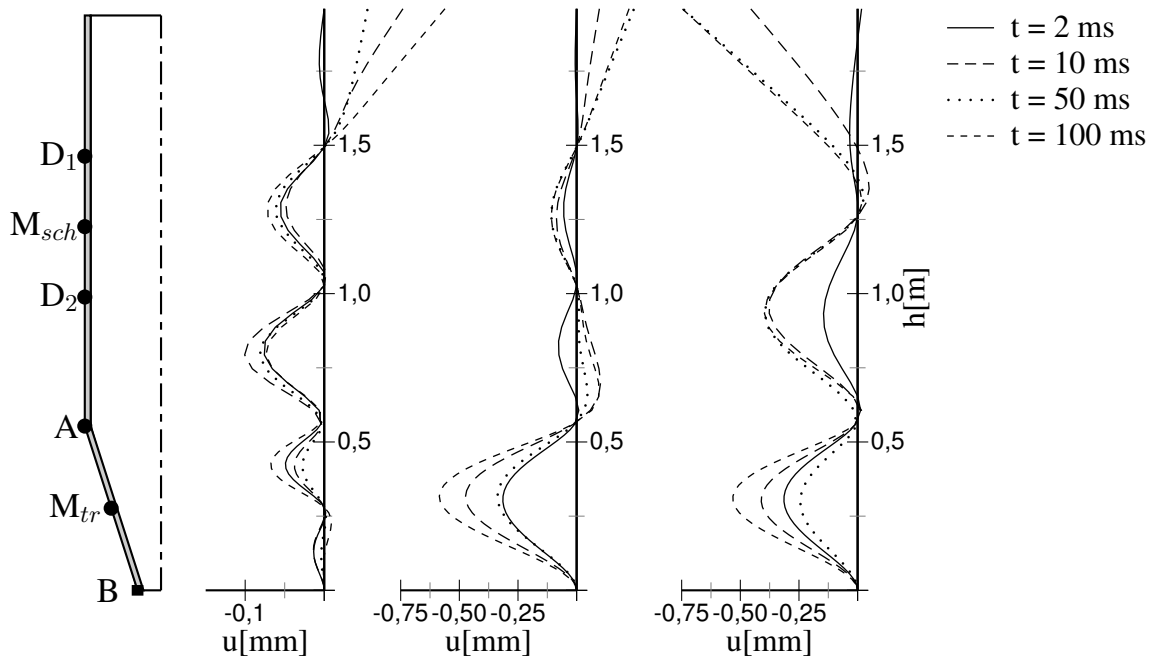


Bild 7.31: Horizontale Verformung der Silowand bei unterschiedlicher Lagerung

nen Verzerrungszustand, so daß die gewählten Auflager wie Versteifungsringe wirken. Das Verformungsverhalten wird für drei verschiedene Anordnungen der Lagerung zunächst mit einer Wanddicke $t_w = 3,5$ mm und einem Elastizitätsmodul von $E_w = 10^{12} \text{ MN/m}^2$ untersucht. Die Wandsteifigkeit ist demzufolge $B_w = E_w \cdot t_w^3 / 12 = 357 \text{ MNm}$. Die geringsten Verformungen zeigt die Silowand für die horizontale Lagerung der Punkte D_1 , D_2 und M_{tr} , während für die Einzellagerung in Punkt M_{sch} deutlich größere Verformungen zu beobachten sind. Die Diagramme in Bild 7.31 zeigen das zeitabhängige Verformungsverhalten zu Beginn der Entleerung und den Einfluß der Anordnung der Auflager.

7.5.1 Einfluß der Wandsteifigkeit

Sowohl die Größe als auch die Form der horizontalen Verformung der Silowand sind von der Wandsteifigkeit B_w abhängig. So zeigt Bild 7.32 die zeitliche Entwicklung

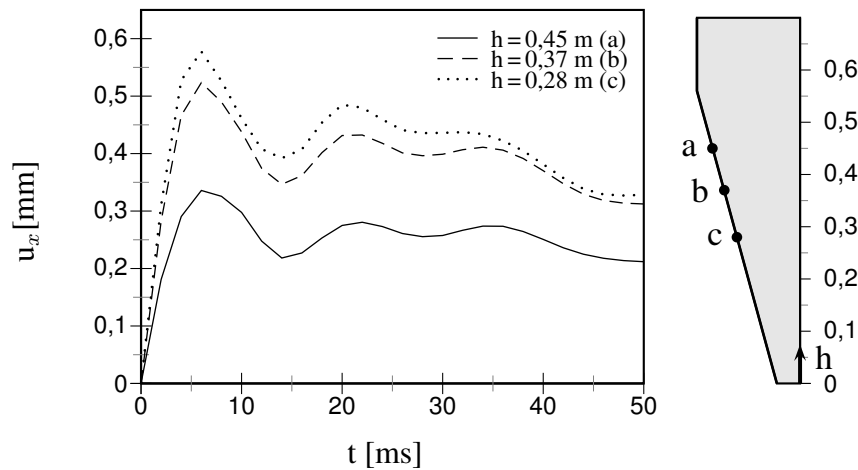


Bild 7.32: Horizontale Verformung der Silowand für $B_w = 357 \text{ MNm}$

der Verformung zu Beginn der Entleerung in drei verschiedenen Höhen für ein in den Punkten D_1 und D_2 gelagertes Silo. Aufgrund der Lagerung in den Punkten A und B ist die Verformung in der Mitte des Trichters, im Punkt c, am größten. Die zeitliche Entwicklung der Verformung folgt aus dem Hochlaufen des Phasenübergangs und der somit zeitlich veränderlichen Belastung. Das Abklingen der Strukturschwingung resultiert aus dem Dämpfungsverhalten des elastischen Silos in Wechselwirkung mit dem granularen Material.

Bild 7.33 zeigt das Verformungsverhalten der Silostruktur für eine vergrößerte Wandsteifigkeit von $B_w = 3570 \text{ MNm}$. Die Größe der maximalen Verformung ist für die festere Silostruktur entsprechend dem Verhältnis der Steifigkeiten etwa um den Faktor 10 geringer. Der abweichende Verlauf im Vergleich zu Bild 7.32 folgt aus der unterschiedlichen Lastabtragung. Je steifer die Silostruktur ist, desto größer ist die Lastverteilung

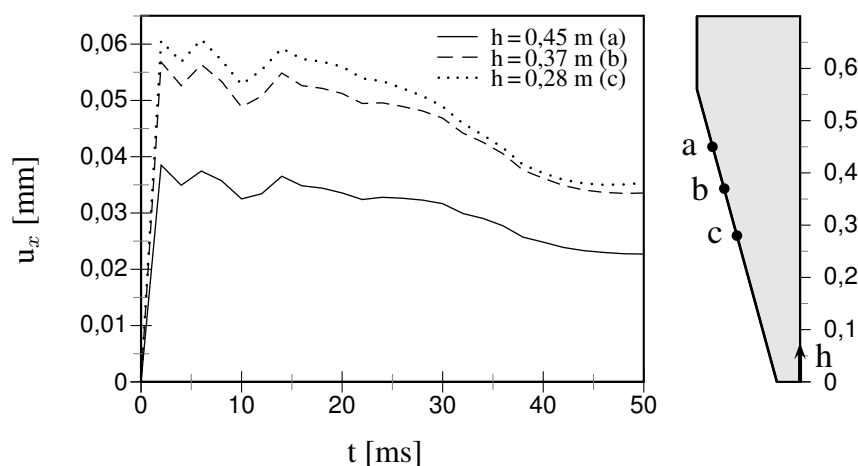


Bild 7.33: Horizontale Verformung der Silowand für $B_w = 3570 \text{ MNm}$

und der Einfluß der Lage der maximalen Wandnormalspannung ist vermindert. Weiterhin beeinflusst die Steifigkeit das Abklingverhalten, da für $B_w=3570\text{MNm}$ keine große Interaktion zwischen Silo und granularem Material auftritt und die geringe, auftretende Schwingung schnell abklingt.

Das unterschiedliche Verformungsverhalten steht in Wechselwirkung zur zeitlichen Entwicklung der Wandnormalspannungen. Bild 7.34 zeigt die Wandnormalspannung t_n in Abhängigkeit der Wandsteifigkeit. Je größer die Wandsteifigkeit desto größer ist die Maximalspannung zu Beginn der Entleerung, da geringe Steifigkeiten und die daraus folgenden größeren Verformungen zu einer Dämpfung und somit zu einer Verminderung der auftretenden Spannungsextrema führen. Weiterhin zeigen die Spannungen infolge der Verformung eine Verzögerung der Spannungsamplituden und ein ausgeprägteres Schwingungsverhalten.

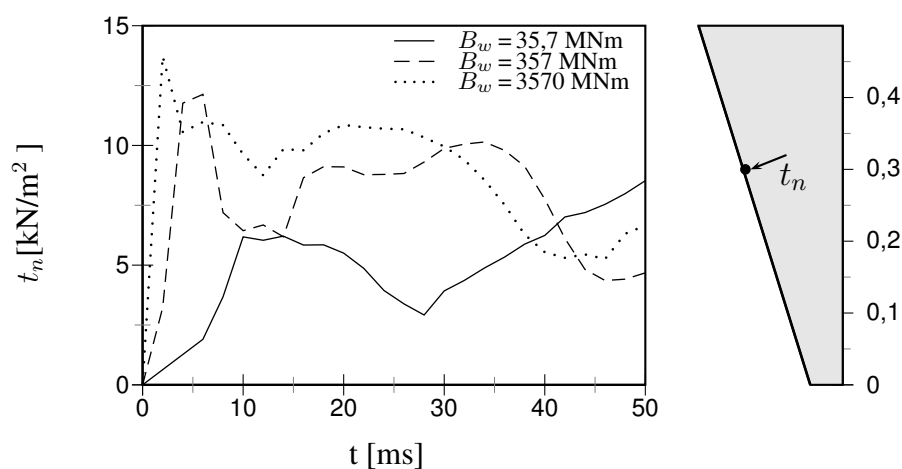


Bild 7.34: Spannungsverlauf in $h = 0,3 \text{ m}$ für verschiedene Wandsteifigkeiten

7.5.2 Einfluß der Anordnung der Auflager

Neben der Wandsteifigkeit hat auch die Anordnung der Auflager über die Höhe des Silos großen Einfluß auf das Verformungsverhalten und die daraus folgende Randspannungsentwicklung zwischen Silowand und Schüttgut. Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Ergebnisse für ein in den Punkten D_1 und D_2 gelagertes Silo zeigen bereits den Einfluß der Gesamtsteifigkeit der Struktur auf das Schwingungsverhalten. Ebenso zeigen die Bilder 7.35 und 7.36 die Unterschiede im Verformungsverhalten zwischen der einfachen Lagerung in Punkt M_{sch} und Auflagern in drei Punkten bei einer konstanten Wandsteifigkeit von $B_w = 3750\text{MNm}$.

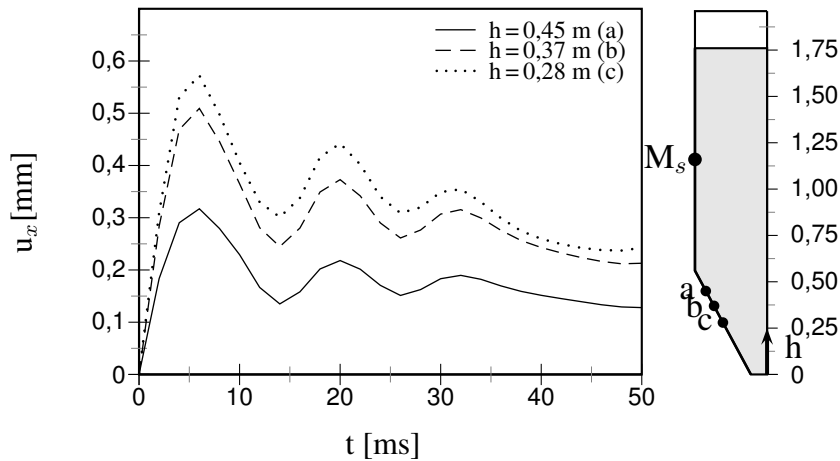


Bild 7.35: Horizontale Verformung der Silowand mit Lager M_{sch}

Die im ersten Diagramm dargestellten Verformungen sind deutlich größer als die Horizontalverformungen des steiferen Systems. Weiterhin zeigt die weichere Silostruktur größere Schwingungsamplituden und somit geringer Spannungsmaxima aufgrund des größeren Dämpfungsverhalten. Das Auflager in der Mitte des Trichters M_{tr} verändert die Schwingungsamplituden in den betrachteten Punkten am deutlichsten, da die Lastabtragung über das zusätzliche Auflager erfolgen kann.

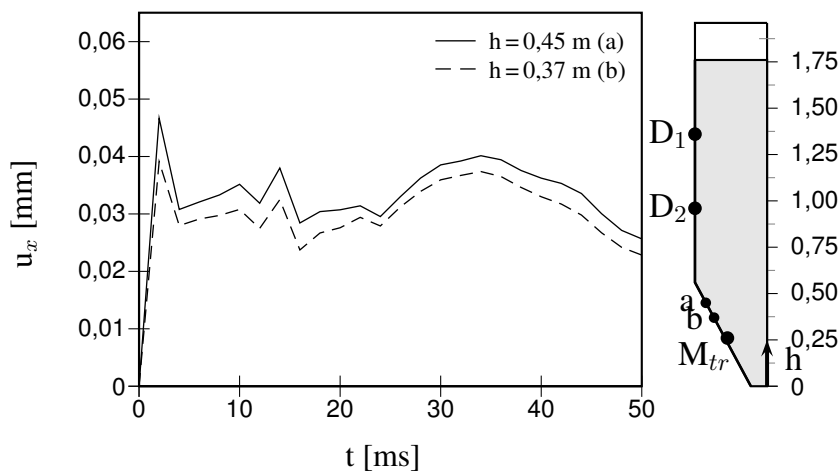


Bild 7.36: Horizontale Verformung der Silowand mit Lager D_1 , D_2 und M_{tr}

Bild 7.37 verdeutlicht den Einfluß der Lagerung auf den zeitabhängigen Spannungsverlauf in der Mitte des Trichters. Wiederum erfährt die dreifach gelagerte Silostruktur die größte Belastung während der Entleerung und zeigt geringere Schwingungsamplituden. Somit erscheinen flexible Silowände geeignet, Spannungsextrema zu minimieren. Andererseits führt die Wahl steiferer Strukturen zu einem konstanten Ausfließen, welches verfahrenstechnisch erwünscht ist.

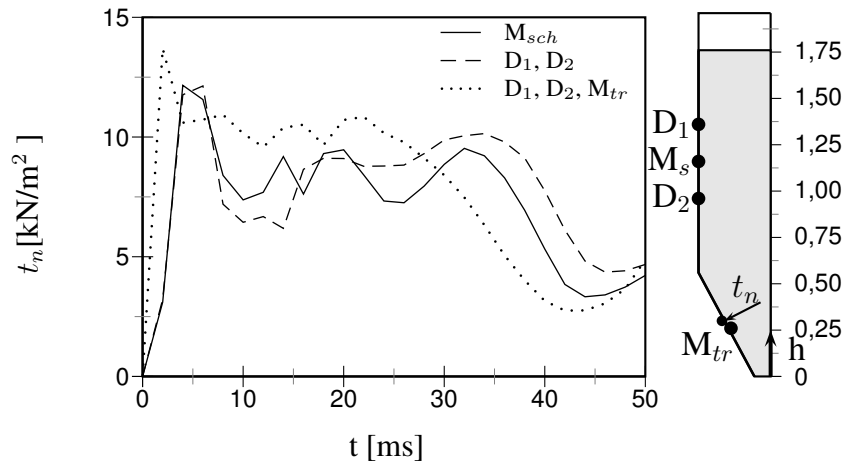


Bild 7.37: Spannungsverlauf für verschiedene Lager in $h = 0,3 \text{ m}$

Bild 7.38 zeigt einen analogen Einfluß der Auflager für einen Punkt entlang der Silowand in $0,185 \text{ m}$ Höhe. Die Spannungsmaxima sind für alle Lagerbedingungen geringer als in Bild 7.37, da der Einfluß des Phasenübergangs mit der Höhe zunimmt.

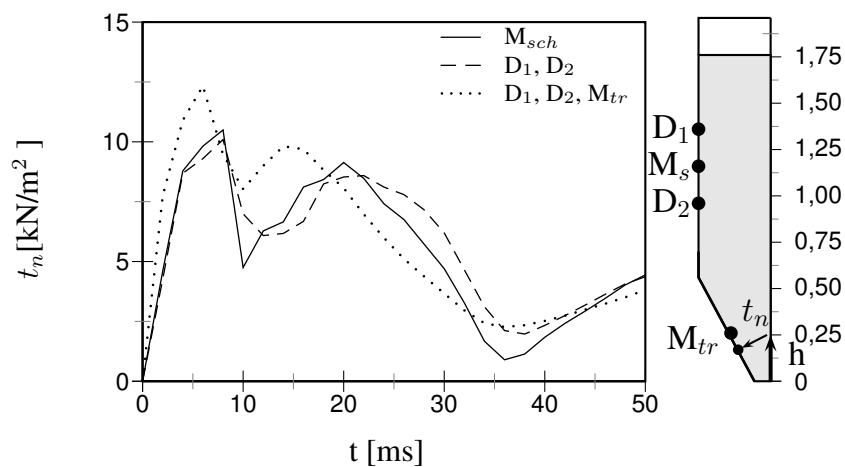


Bild 7.38: Spannungsverlauf für verschiedene Lager in $h = 0,185 \text{ m}$

Die Beispiele zeigen, daß das verwendete Materialmodell zusammen mit einer strengen Fluid-Struktur-Kopplung erlaubt, Aussagen über die Wechselwirkung zwischen Silowand und Schüttgut zu treffen und eventuell auftretende Spannungsextrema nur mit Hilfe einer vollständigen Betrachtung des Silos vorhersagbar sind.

8 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Mehrphasenmodell für granulare Materialien entwickelt und mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode unter Berücksichtigung von Fluid-Struktur-Kopplung und freier Oberfläche für die Simulation des Entleerungsvorganges von Silos eingesetzt.

Vorhersagen über das Entleeren von Silos sind neben der verfahrenstechnischen Auslegung auch für die konstruktive Bemessung der Silostruktur von großer Bedeutung, da die Belastung infolge des dynamischen Fließens den statischen Ruhedruck lokal um ein Vielfaches übersteigt. Lokale Spannungsmaxima, welche unmittelbar nach dem Öffnen des Silos auftreten, können zu einem Versagen der Wand führen, werden jedoch in bestehenden Normen nicht berücksichtigt. Desweiteren führt das Zusammenwirken des nichtlinearen Materialverhaltens, der Wandreibung und der Wechselwirkung zwischen Schüttgut und Silostruktur zu einem pulsierenden Ausfließen. Zu den daraus resultierenden Phänomenen zählen Brückenbildung und tote Zonen ebenso wie Schwingungen der Silowand.

Das Verhalten granularer Materialien unter großer Scherbeanspruchung und geringer Dichte, wie sie in einer Couette-Strömung für dünne Suspensionen und in Hangrutschungen auftreten, besitzt große phänomenologische Ähnlichkeit zu nicht-newtonschen Fluiden. Versuche zeigen eine Ratenabhängigkeit der Scherspannung und die Existenz einer Grenzfließspannung analog zu Bingham'schen Fluiden, welche mit Hilfe einer Ersatzviskosität modelliert werden. Die Modellierung als Fluid ist für die Beschreibung schneller Fließzustände und großer zurückgelegter Distanzen geeignet, ermöglicht jedoch keine genaue Abbildung quasi-statischer Spannungszustände.

Andererseits ist das Materialverhalten im Ruhezustand durch Reibung, nichtlineare Steifigkeit und eine Fließgrenze gekennzeichnet. Aufgrund ihrer Bedeutung in der Bodenmechanik existieren zahlreiche Modelle zur Beschreibung des quasi-statischen Zustandes, welche für unterschiedliche granulare Materialien und Anwendungen genutzt werden. Zur Abbildung der Fließgrenze wird im Rahmen dieser Arbeit ein Modell für viskoplastisches Materialverhalten gewählt, um einen stetigen Übergang zur Modellierung als Flüssigkeit zu gewährleisten.

In Silos findet unmittelbar nach dem Öffnen eine Phasenumwandlung von festem zu flüssigem Zustand statt. Daher wird hier ein Modell entwickelt, welches das Gesamtmaterialverhalten als gewichtete Summation aus Flüssigkeits- und Feststoffverhalten beschreibt. Der Wichtungsfaktor berücksichtigt dabei den vorherrschenden Phasenzustand, vorrangig abgeleitet aus Scherrate und Scherspannung. Der additive Modellansatz erlaubt mit relativ geringem numerischen Aufwand die Simulation komplexer Vorgänge wie das Entleeren von Silos oder den Phasenübergang zu Beginn von Hangrutschungen. Weiterhin erfordert das gewählte Modell nur eine geringe Anzahl zu bestimmender Modellparameter, welche für beide Komponenten getrennt ermittelt werden können.

Die Diskretisierung der Modellgleichungen erfolgt einheitlich für Silowand, Schüttgut und umgebende Luft mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode. Die Methode erlaubt die Berechnung komplexer Geometrien sowie eine monolithische Kopplung der Medien zur Untersuchung der gegenseitigen Wechselwirkung. Die Beschreibung des Entleerungsvorganges von Silos erfordert weiterhin die Abbildung der freien Oberfläche, welche mit Hilfe der Level-Set-Methode bestimmt wird. Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Beschreibung dehnungsabhängigen Materialverhaltens in Euler-scher Betrachtungsweise, die eine explizite Kopplung mit der Silostruktur ermöglicht und für die Betrachtung des nahezu konstanten Kontrollvolumens innerhalb des Silos geeignet ist.

Numerische Simulationen von Hangrutschungen und Schüttkegeln zeigen die Leistungsfähigkeit des entwickelten Modells und der numerischen Umsetzung. Die durchgeführten Simulationen ermöglichen eine Anpassung der Modellparameter an Versuchsdaten und zeigen die Vorteile der entwickelten Zweiphasenmodellierung gegenüber einer einseitigen Betrachtung als Feststoff oder Flüssigkeit.

Die Erkenntnisse werden zur Analyse der Phänomenologie der Siloentleerung und zur Gewinnung von Aussagen über Einflüsse geometrischer sowie materieller Größen genutzt. Dabei stehen das zeitabhängige Entleerungsverhalten, die resultierenden Spannungen sowie Einflüsse aus Wandsteifigkeit, Wandreibungswinkel und Silogeometrie im Mittelpunkt der Betrachtungen. Eine abschließende Untersuchung zeigt die notwendige Berücksichtigung der Wandverformung und ihrer Wechselwirkung mit dem Schüttgut, um realistische Vorhersagen der auftretenden Wandspannungen zu ermöglichen.

Summary

The presented work introduces a continuum mechanical model describing fluid and solid properties of granular materials and the implementation of this multiphase model in the space-time-finite element method. Considering fluid-structure interaction and free surface flow the discharge process of silos is simulated. During the silo discharge a number of effects are observed that may cause serious difficulties concerning processing as well as structural damage. Compression zones appear due to a pulsating outflow that may form solid zones along the edges or bridging effects which prevent further discharge. Special investigations are required to analyse the occurrence of a switch between fluid and solid stress conditions at the beginning of flow. The resulting local stress maxima may lead to local failure of the silo structure and are therefore of critical interest to design of silos. Nevertheless, the existing standards only consider static behaviour and use scaling factors to take dynamic loading into account.

Granular materials applied to high shear rates and with low density may show large phenomenological similarities to non-Newtonian fluids. This occurs in Couette-flow of thin suspensions as well as in avalanches. Experiments show a rate dependent material behaviour of the shear stress and the existence of a yield stress in analogy to Bingham fluids. This can be modelled using an artificial viscosity. Modelling granular materials as fluids is valid for describing fast flows and large displacements but does not allow for the description of quasi-static states.

On the other hand, the granular material behaviour at rest is governed by internal friction, non-linear stiffness and a yield stress. Due to its relevance in soil mechanics numerous models exist, that describe quasi-static behaviour. They are valid for various granular materials and applications. In this work, a visco plastic material model is applied including yield surface and flow rule to ensure a steady transition to the flow regime.

In silos, a phase transition between solid, visco-plastic state and the fluid like state occurs immediately after the beginning of discharge. Therefore, the presented material model describes the total stress as weighted sum of fluid and solid stresses. The additive model allows for the simulation of complex processes such as the discharge of silos and the phase transition at the beginning of avalanches with relatively low computing time. Furthermore, the developed model requires only a few model parameters, which may be determined separately for each phase.

The same discretisation scheme, the space-time-finite-element method, is used for silo structure, bulk material and surrounding air. The method permits the simulation of

complex geometries and the monolithic coupling of all considered media enabling the investigation of interaction mechanisms. Furthermore, the description of the discharge process in silos requires a representation of free surface flow. For this reason the level set method is employed. Another main task of the presented work is the description of strain dependent material behaviour in an Eulerian description. The chosen method allows the explicit coupling of silo structure and granular material and the consideration of a nearly constant control volume.

Numerical simulations of avalanches and granular heaps show the performance of the developed model and its numerical implementation. The simulations undertaken allow for the adjustment of model parameters to existing experimental results. They underline the advantages of a multiphase model combining fluid and solid properties for granular materials.

The achieved results are used for the analysis of silo discharge, its phenomenology and the influence of geometrical as well as material parameters. Time dependent discharge process, resulting stresses and the influence of wall stiffness, wall friction and silo geometry are of particular interest. Finally, an investigation shows the necessary consideration of wall deformation and its interaction with bulk material to achieve realistic predictions for the loading of the silo structure.

Literatur

- [1] *DIN 1055-6: Lastannahmen für Bauten. Lasten in Silozellen.* Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 2000.
- [2] *18. EG-Verordnung Nr. 178/2002.* 28. Januar 2002.
- [3] H. Ahn, C. Brennen & R. Sabersky: *Experiments on chute flows of granular materials.* Micromechanics of granular materials: proceedings of the U.S. Japan Seminar, 339–348, 1988.
- [4] J. Altenbach & H. Altenbach: *Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Teubner Studienbücher, 1994.
- [5] K. Anderson & R. Jackson: *A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials for fully developed flow down inclined planes.* Journal of Fluid Mechanics, 241, 145–168, 1992.
- [6] F. Ayuga et al.: *Discharge and the eccentricity of the hopper influence on the silo wall pressure.* Journal of Engineering Mechanics, 1067–1074, Okt. 2001.
- [7] I. Babuška & J. Melenk: *The partition of unity method.* Int. J. Num. Meth. in Engng, 40, 727–758, 1997.
- [8] R. Bagnold: *Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear.* Proc. Royal Society A, 225, 49–63, 1954.
- [9] T. Belytschko et al.: *Arbitrary discontinuities in finite elements.* Int. J. Num. Meth. in Engng, 50, 993–1013, 2001.
- [10] T. Belytschko, W. Liu & B. Moran: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- [11] W. Beverloo, H. Leninger & J. van der Velde: *The flow of granular material through orifices.* Chem. Eng. Sci, 15, 260, 1961.
- [12] J.-U. Böhrnsen: *Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren von Silos.* Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [13] O. Cazacu & I. Ionescu: *Compressible rigid visco-plastic fluids.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54(8), 1640–1667, 2006.
- [14] C.-L. Chen & C.-H. Ling: *Granular-flow rheology: Role of shear-rate number in transition regime.* J. Engrg. Mech., 122(5), 469–481, 1996.

- [15] J. Chen, S. Yu, J. Ooi & J. Rotter: *Finite-Element Modeling of Filling Pressure in a Full-Scale Silo*. Journal of Engineering Mechanics, 1058–1066, Okt. 2001.
- [16] W.-F. Chen: *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol. 2: Plasticity and Modelling*. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 1994.
- [17] M. Crochet & R. Keunings: *Finite element analysis of the swell of a highly elastic fluid*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 10(3-4), 339–356, 1982.
- [18] P. Cundall & O. Strack: *A discrete numerical model for granular assemblies*. Geotechnique, 29, 46–65, 1979.
- [19] C. Desai & H. Siriwardane: *Constitutive Laws for Engineering Materials - with emphasis on geologic materials*. Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- [20] D. Dinkler & U. H. Kowalsky: *Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens*. Festschrift. Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag. Eigenverlag Inst. für Statik, Braunschweig, 1998.
- [21] J. Donea et al.: *Encyclopedia of computational mechanics, Volume 1: Fundamentals*, chapter Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- [22] S. Dupont, J. Marchal & M. Crochet: *Finite element simulation of viscoelastic fluids of the integral type*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 17, 157–183, 1985.
- [23] Eckart, W. and Gray, J.M.N.T. and Hutter, K.: *Particle image velocimetry for granular avalanche on inclined plane*. Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large And Catastrophic Deformations (Hutter, K., Kirchner, N. eds.), 2003. ISBN:3540008497.
- [24] L. Elaskar, S.A. and Godoy: *Constitutive relations for compressible granular materials using non-newtonian fluid mechanics*. Int. J. Mech. Science, 40(10), 1001–1018, 1998.
- [25] H. Fritz, W. Hager & H.-E. Minor: *Landslide generated impulse waves. 1. instantaneous flow fields*. Experiments in Fluids, 35, 505–519, 2003.
- [26] L. Fusi & A. Farina: *A mathematical model for bingham-like fluids with viscoelastic core*. Z. Angew. Math. Phys., 55, 826–847, 2004.
- [27] M. Gillie & J. Rotter: *The effect of patch loads on thin-walled steel silos*. Thin Walled Structures, 40, 835–852, 2002.
- [28] M. Goodman & S. Cowin: *Two problems in the gravity flow of granular materials*. J. Fluid Mech., 45, 321, 1971.

- [29] G. Gudehus: *A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading*. In W. Wittke, editor, 3.rd Conf. on Numer. Methods in Geomechanics, pages 1309–1323, Aachen, 1979.
- [30] R. Gudhe, R. Yalamanchili & M. Massoudi: *Flow of granular materials down a vertical pipe*. Int. J. Non-Lin. Mechanics, 29(1), 1–12, 1994.
- [31] P. Haff: *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon*. Journal of Fluid Mechanics, 134, 401–430, 1983.
- [32] P. Hansbo: *The characteristic streamline diffusion method for the time-dependent incompressible navier-stokes equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 99, 171–186, 1992.
- [33] F. Harlow & J. Welch: *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface*. The Physics of Fluids, 20, 2182–2189, 1965.
- [34] H. Heinriche & T. Jacob: *Die schüttgutmechanische Betrachtung der Siloausleitung und ihre Anwendung auf ein Silo unter Tage*. Schüttgut, 6, 430–435, 2005.
- [35] I. Herle: *Prognose von Bodenverformungen*. Dissertation, Institut für Boden- und Felsmechanik, TU Karlsruhe, 1997.
- [36] C. Hirt & B. Nichols: *Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries*. J. Comp. Physics, 39, 201–225, 1981.
- [37] K. Hohenemser & W. Prager: *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*. ZAMM, 12, 1932.
- [38] J. Holst et al.: *Numerical Modeling of Silo Filling. I: Continuum Analyses*. Journal of Engineering Mechanics, 94–103, 1999.
- [39] J. Holst et al.: *Numerical modeling of silo filling. ii: Discrete element analyses*. Journal of Engineering Mechanics, 104–110, 1999.
- [40] A. Huber: *Schwallwellen in Seen als Folge von Felsstürzen*. Mitteilung No. 47 der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie an der ETH, 1–122, 1980.
- [41] T. J. R. Hughes & G. M. Hulbert: *Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 66, 339–363, 1988.
- [42] T. J. R. Hughes & K. Jansen: *Finite element methods in wind engineering*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 46–47, 297–313, 1993.

- [43] G. M. Hulbert: *Discontinuity-capturing operators for elastodynamics*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 96, 409–426, 1992.
- [44] G. M. Hulbert: *Time finite element methods for structural dynamics*. Int. J. Numer. Methods Engrg. 33, 307–331, 1992.
- [45] M. Hulsen et al.: *A new approach to the deformation fields method for solving complex flows using integral constitutive equations*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 98, 201–221, 2001.
- [46] K. Hutter & K. Rajagopal: *On flows of granular materials*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 6, 81–139, 1994.
- [47] B. Hübner: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Dissertation, TU Braunschweig, 2003.
- [48] B. Hübner, E. Walhorn & D. Dinkler: *A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 193, 2087–2104, 2004.
- [49] R. Iverson & J. Vallance: *New views of granular mass flows*. GSA, 29(2), 115–118, 2001.
- [50] H. Janssen: *Versuche über Getreidedruck in Silozellen*. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 39, 1045–1049, 1895.
- [51] A. Jenike: *Storage and flow of solids*. Bull. 123, Utah Engng. Exp. Station, Univ. of Utah, Salt Lake City, 1964.
- [52] J.M.N.T. Gray: *Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large And Catastrophic Deformations* (Hutter, K., Kirchner, N.(eds.)), chapter Rapid granular Avalanches. Springer, 2003. ISBN:3540008497.
- [53] J. Jofriet, S. Negi & Z. Lu: *A numerical model for flow of granular materials in silos. part 3: Parametric study*. J. agric. Engng. Res., 68, 237–246, 1997.
- [54] J. Johanson: *Stress and Velocity Fields in the Gravity Flow of Bulk Solids*. Journal of Applied Mechanics, 31, 499–506, 1964.
- [55] C. Johnson: *Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 107, 117–129, 1993.
- [56] G. Keiter, T.; Rombach: *Numerical Aspects of FE Simulations of Granular Flow in Silos*. Journal of Engineering Mechanics, 1044–1050, Okt. 2001.
- [57] R. Keunings & M. Crochet: *Numerical simulation of the flow of a viscoelastic fluid through an abrupt contraction*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 14, 279–299, 1984.

- [58] D. Kolymbas: *Introduction to Hypoplasticity*. A.A. Balkema, Rotterdam, ISBN 90-5809-306-9, 2000.
- [59] A. Kölke: *Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen*. Dissertation, TU Braunschweig, 2005.
- [60] P. Lade: *Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces*. Journal Solids Structures, 13, 1019–1035, 1977.
- [61] L. Lehmann: *Numerische Simulation der Spannungs-und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten*. Dissertation, TU Braunschweig, 1996.
- [62] P. Le Tallec & J. Mouro: *Fluid structure interaction with large structural displacements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 3039–3068, 2001.
- [63] M. Louge: *Model for dense granular flows down bumpy inclines*. Physical Review E, 67, 061303, 2003.
- [64] C. Lun: *Kinetic theory for granular flow of dense, slightly inelastic, slightly rough spheres*. Journal of Fluid Mechanics, 233, 539–559, 1991.
- [65] R. Löhner, C. Yang, J. Cebal, J. D. Baum, H. Luo, D. Pelessone & C. Charman: *Fluid-structure interaction using a loose coupling algorithm and adaptive unstructured grids*. In M. Hafez & K. Oshima, editors, Computational Fluid Dynamics Review 1995. John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- [66] P. Martens: *Silo-Handbuch*. Ernst, Berlin, 1988.
- [67] M. Massoudi & G. Ahmadi: *Rapid flow of granular materials with density and fluctuation energy gradients*. Int. J. Non-Lin. Mechanics, 29(4), 487–492, 1994.
- [68] D. McTigue: *A nonlinear constitutive model for granular materials: application to gravity flow*. J. Appl. Mech., 49(2), 291–296, 1982.
- [69] J. Melenk & I. Babuška: *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*. Int. J. Num. Meth. in Engng, 39, 289–314, 1996.
- [70] R. Nedderman: *The use of the kinematic model to predict the development of the stagnant zone boundary in the batch discharge of a bunker*. Chemical Engineering Science., 50(6), 959–965, 1995.
- [71] S. Negi, Z. Lu & J. Jofriet: *A numerical model for flow of granular materials in silos. part 2: Model validation*. J. agric. Engng. Res., 1997.
- [72] S. Osher & J. Sethian: *Fronts propagation with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations*. J. Comp. Physics, 79, 12–49, 1988.

- [73] M. Pastor, O. Zienkiewicz & A. Chan: *Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 14, 151–190, 1990.
- [74] P. Perzyna: *Fundamental problems in viscoplasticity*. Recent Advances in Applied Mechanics, 9, 243–377, 1966.
- [75] Peters, Hulsen & van den Brule: *Instationary eulerian viscoelastic flow simulations using time separable rivlin-sawyers constitutive equations*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 89, 209–228, 2000.
- [76] O. Pouliquen: *Scaling laws in granular flows down rough inclined planes*. Physics of Fluids, 11(3), 542–548, 1999.
- [77] M. Quecedo, M. Pastor & M. Herreros: *Numerical modelling of impulse wave generated by fast landslides*. Int. J. Num. Meth. in Engng, 6, 47–60, 2004.
- [78] E. Ramm & W. A. Wall: *Interaction of fluids and thin structures*. In 2nd European Conference on Computational Mechanics, Cracow, 2001.
- [79] A. Roberts & C. Wensrich: *Flow dynamics of 'quaking' in gravity discharge from silos*. Chemical Engineering Science., 57, 295–305, 2002.
- [80] J. Rotter: *Pressure, stresses and buckling in metal silos containing eccentrically discharging solids*. Festschrift Prof. Richard Greiner. Institut für Stahlbau und Flächentragwerke, TU Graz, <http://www.shf.tugraz.at/publication.html>. 2001.
- [81] J. Rotter, C. Brown & E. Lahlouh: *Patterns of wall pressure on filling a square planform steel silo*. Engineering Structures, 24, 135–150, 2002.
- [82] A. Samadani, L. Mahadevan & A. Kudrolli: *Shocks in sand flowing in a silo*. Journal of Fluid Mechanics, 452, 293–301, 2002.
- [83] S. Savage: *Analyses of slow high-concentration flows of granular materials*. J. Fluid Mech., 377, 1–26, 1998.
- [84] S. Savage & K. Hutter: *The motion of a finite mass of granular material down a rough incline*. J. Fluid Mech., 199, 177–215, 1989.
- [85] S. Savage & S. McKeown: *Shear stresses developed during rapid shear of dense concentrations of large spherical particles between concentric cylinders*. J. Fluid Mech., 127, 453–472, 1983.
- [86] D. Schulze: *Pulver und Schüttgüter: Fließeigenschaften und Handhabung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, VDI-Buch, 2006.
- [87] J. Schwedes: *Fließverhalten von Schüttgütern in Bunkern*. Chem.-Ing.-Tech, 48, 294–300.

- [88] J. Schwedes: *17. Hochschulkurs: Lagern und Fließen von Schüttgütern*. Institut für Mechanische Verfahrenstechnik, TU Braunschweig, 2001.
- [89] A. Srivastava & S. Sundaresan: *Analysis of a frictional-kinetic model for gas-particle flow*. Powder Technology, 129, 72–85, 2003.
- [90] J. Steindorf: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [91] H. Stephani & G. Kluge: *Theoretische Mechanik: Punkt- und Kontinuumsmechanik*. Spektrum Akad. Verlag, 1995.
- [92] J. Tejchman: *Technical concept to prevent the silo honking*. Powder Technology, 106, 7–22, 1999.
- [93] T. E. Tezduyar, M. Behr & J. Liou: *A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 94, 339–351, 1992.
- [94] T. E. Tezduyar, M. Behr & S. Mittal: *A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows and flows with drifting cylinders*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 94, 353–371, 1992.
- [95] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray & R. Shih: *Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95, 221–242, 1992.
- [96] T. E. Tezduyar & Y. Osawa: *Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 411–430, 2000.
- [97] C. Truesdell: *Hypoelasticity*. J. Ration. Mech. Anal., 4, 83–133, 1955.
- [98] C. Truesdell & W. Noll: *The nonlinear field theories of mechanics, Handbuch der Physik III/3*. Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [99] D. Volvson, L. Tsimring & I. Aranson: *Partially fluidized shear granular flows: Continuum theory and molecular dynamics simulations*. Physical Review E, 68, 021301, 2003.
- [100] E. Walhorn: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.

- [101] W. A. Wall: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [102] A. Waters & A. Drescher: *Modeling plug flow in bins/hoppers*. Powder Technology, 113, 168–175, 2000.
- [103] O. Zienkiewicz, D. Owen & I. Corneau: *Analysis of viscoplastic effects in pressure vessels by the fem*. Nuclear Eng. & design, 28(2), 278–288, 1974.
- [104] T. Zisis & E. Mitsoulis: *Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 105, 1–20, 2002.

Berichte aus dem Institut für Statik ab 1994

- | | | |
|-----|---------|---|
| Nr. | 94-78 | U. KOWALSKY: Mikrophysikalisch begründetes Werkstoffmodell zur Berechnung thermomechanisch beanspruchter Konstruktionen (1994). |
| Nr. | 95-79 | N. OBERBECK: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff - Transport in Beton, Theorie und Berechnung (1995). |
| Nr. | 95-80 | N. MELEKA: Nonlinear Analysis of Flat Slab Floors (1995). |
| Nr. | 97-81 | H. FLOREN: Strukturanalysen unterirdischer Hohlräume im Salzgebirge mit hybriden Randelement- / Finite-Element-Methoden (1997). |
| Nr. | 96-82 | T. GARTUNG: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung (1996). |
| Nr. | 97-83 | T. STREILEIN: Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen (1997). |
| Nr. | 97-84 | B. GUERICKE: Geomechanische Untersuchungen zur Sicherheitsanalyse von Deponien im Salzgestein (1997). |
| Nr. | 97-85 | U. GLABISCH: Stoffmodell für Grenzzustände im Salzgestein zur Berechnung von Gebirgshohlräumen (1997). |
| Nr. | 97-86 | E. ELARABI: Numerical Analysis of the Swelling Soil Effects on Structures (1997). |
| Nr. | 98-87 | I. SPOHR: Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen (1998). |
| Nr. | 99-88 | C.-X. HUANG: Berechnung von Temperaturspannungen und Rißbildungen infolge Hydratation in 3D-Betonkonstruktionen (1999). |
| Nr. | 2000-89 | H. PENSKY: Beschreibung von streuendem Materialverhalten und von Schädigung bei inelastischen Werkstoffen (2000). |
| Nr. | 2000-90 | A. STEFFENS: Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbindung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung (2000). |
| Nr. | 2001-91 | J. EBERS-ERNST: Modellierung des inelastischen Verformungsverhaltens von Siedlungsabfalldeponien (2001). |
| Nr. | 2001-92 | J. HANEL: Modell zur Analyse von gekoppelten Transport- und Stoffabbauprozessen in Deponien (2001). |
| Nr. | 2002-93 | B. WIEDEMANN: Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung (2002). |

- | | | |
|-----|----------|---|
| Nr. | 2002-94 | R. TACKE: Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse (2002). |
| Nr. | 2002-95 | E. WALHORN: Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2002). |
| Nr. | 2003-96 | B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen (2003). |
| Nr. | 2003-97 | J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme (2003). |
| Nr. | 2003-98 | O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen (2003). |
| Nr. | 2005-99 | A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen (2005). |
| Nr. | 2006-100 | D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996 – 2006 (2006). |
| Nr. | 2006-101 | A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2006). |
| Nr. | 2006-102 | M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden (2006). |
| Nr. | 2006-103 | L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt (2006). |
| Nr. | 2006-104 | T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Materialmodell für duktile und zeitabhängige Schädigung (2006). |

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.
Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).
Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.
Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.
Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland
Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116
E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>